Problema 0.1. Una *seminorma en* $\mathbb{R}^n$ es una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Sea f una seminorma y sea

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \leq 1\}$$

Pruebe que:

a) f es acotada sobre la esfera unitaria.
b) f es continua.
c) K es cerrado.
d) K es compacto si y solo si f satisface

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Solución:

1. sea $x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$, descomponiendo x en la base canónica $x = \sum_i x_i e_i$ entonces

$$f(x) = f\left(\sum_i x_i e_i\right) \leq \sum_i |x_i| f(e_i) = (|x_1|, \cdots, |x_n|) \cdot (f(e_1), \cdots, f(e_n)) \leq \|x\| \sqrt{\sum_i f(e_i)^2} \leq M$$

es decir f es acotada sobre la esfera unitaria.

2. sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, probemos que f es continua en x_0: para ello notemos que $f(x) = f(x - x_0 + x_0) \leq f(x - x_0) + f(x_0)$, es decir $f(x) - f(x_0) \leq f(x - x_0)$, intercambiando los roles[1]de x y x_0 se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq f(x - x_0)$$

PDQ $(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)$ tq $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$:
sea $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x_0)| \leq f(x - x_0) = \frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_0\|} f(x - x_0) = \|x - x_0\| f\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) \leq \delta M = \epsilon$$

luego basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, donde hemos usado que $\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$ esta sobre la esfera unitaria.

3. sea $x \in adh(K)$, entonces por definición existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$ tal que $x_n \to x$. de la parte anterior se tiene que f es continua así $f(x_n) \to f(x)$ entonces pasando al limite se tiene

$$f(x_n) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq 1$$

es decir $x \in K$. con esto probamos que $adh(K) \subset K$, por otro lado es obvio que $K \subset adh(K)$ luego $K = adh(K)$ es decir K es cerrado.

4. $(\Rightarrow)$por contradicción supongamos que existe $x \neq 0$ tal que $f(x) = 0$, entonces $x \in K$ y luego $\forall t\ tx \in K$, entonces K contiene al subespacio generado por x y por lo tanto no es acotado, lo cual es una contradicción pues K es compacto.

[1] notar que $f(x - x_0) = f(-1(x_0 - x)) = |-1| f(x_0 - x) = f(x_0 - x)$.

($\Leftarrow$)probemos que K es acotado, por contradicción supongamos que no lo es, es decir existe $\|x_n\| \to \infty$ tal que $f(x_n) \leq 1$ entonces

$$0 \leq f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} \leq \frac{1}{\|x_n\|}$$

tomando $n \to \infty$ resulta que $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ satisface $\|y_n\| = 1$ y $f(y_n) \to 0$ y dado que $\{y_n\}_n \subset adh(B(0,2))$ que es compacta y por lo tanto existe una subsucesión de y_n digamos $y_{\sigma(n)}$ convergente, llamemos $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_{\sigma(n)}$ entonces por continuidad de f, $0 = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(y_{\sigma(n)}\right) = f(y)$ y así $y = 0$ lo cual es una contradicción pues por continuidad de la norma $\|y\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} y_{\sigma(n)}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$.

: