

Clase Auxiliar N°3: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Manuel del Pino

Auxiliares: Thomas Capelle - Emilio Vilches - Nicolás Hernández

3 de Abril de 2008

P1. (i) Demuestre que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^N / \|y\| = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^N$.

(ii) Sea $\phi: \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, relativamente a $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, y defina $f: \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Demostrar que f alcanza su mínimo y máximo sobre su dominio.

P2. (a) Sea $A \in M_{nn}$. Se define $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x) = x^t A x$. Estudie la diferenciabilidad de h .

(b) Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 2x + 7y + 17$. Demuestre que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) cualquiera y calcule su derivada.

P3. Una seminorma en $\mathbb{R}^n$ es una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.
3. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Sea f una seminorma y sea $K = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 1\}$

Pruebe que:

- (a) f es acotada sobre la esfera unitaria.
- (b) f es continua.
- (c) K es cerrado.
- (d) K es compacto si y solo si f satisface $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

P4. Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}^n$ está dotado de la norma euclidiana $\|\cdot\|$. Se dice que F es contractante si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$ y $\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. En lo que sigue F será una función contractante.

Considere la sucesión definida por $x_{n+1} = F(x_n)$:

1. Demuestre que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Pruebe que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \forall p \in \mathbb{N}$. Concluya que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.
3. Demuestre que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un x^* tal que $F(x^*) = x^*$ (llamado Punto fijo de F).
4. Demuestre que x^* es único.