

Clase Auxiliar N°1: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Thomas Capelle - Emilio Vilches

20 de Marzo de 2008

P1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ probar que:

1. $\|\frac{1}{2}(x+y)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Identidad del paralelogramo).

P2. Demuestre que las siguientes propiedades:

1. Si $A \subseteq B$ entonces $\text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$.
2. $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.
3. $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$.
4. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son abiertos entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto.
5. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto.

P3. Demuestre las siguientes propiedades.

1. $A \subseteq B$ entonces $\text{Adh}(A) \subseteq \text{Adh}(B)$.
2. $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$.
3. $\text{Adh}(A \cap B) \supseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$.
4. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son cerrados entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.
5. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.

P4. Para los siguientes conjuntos, determine interior, adherencia y frontera.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$
2. $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\}$
4. $D = \left\{ \left(\frac{1}{k}, (-1)^k \right) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N} \right\}$

P5. Sea $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}^n$ está dotado de la norma euclidiana $\|\cdot\|$. Se dice que F es contractante si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$ y $\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. En lo que sigue F será una función contractante.

Considere la sucesión definida por $x_{n+1} = F(x_n)$:

1. Demuestre que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Pruebe que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \forall p \in \mathbb{N}$. Concluya que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.
3. Demuestre que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un x^* tal que $F(x^*) = x^*$ (llamado Punto fijo de F).
4. Demuestre que x^* es único.