Cálculo en Varias Variables - Auxiliar # 7

Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliares:** J. Deride - J. Lemus.

Regla de la cadena de orden superior

Problema 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{1}$$

Nos proponemos determinar todas las soluciones de la ecuación anterior:

a. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un cambio de variable definido por $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u = x + vt \\ w = x - vt \end{pmatrix}$.
   Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,w) = f \circ \phi^{-1}(u,w)$ esta bien definida y que es de clase $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$.
b. Usando el cambio de variable anterior, demuestre que la ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) = 0 \qquad \forall (u,w) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

c. Determine la solución general de la ecuación (2) y deduzca una solución general para $f(x,t)$ solución de la ecuación (1). Encuentre una solución particular para f que no sea la función nula, ni un polinomio.

Problema 2. Se $u(r,s)$ una función de clase $\mathscr{C}^2$ que satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,s) + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(r,s) = \frac{1}{r^2 + s^2}$$

Considere el cambio de variables

$$r = \mathrm{e}^x \cos(y), \qquad s = \mathrm{e}^x \sin(y),$$

y defina $v(x,y) = u(\mathrm{e}^x \cos(y), \mathrm{e}^x \sin(y))$. Calcule la expresión

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Problema 3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una primitiva de g. Se pide:

i. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$, soluciones de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$g(y)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

   usando las nuevas coordenadas u y v definidas por:

$$x = u + h(v) \quad y = v.$$

ii. Utilizar el resultado obtenido para resolver:

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + (y^2+1)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$