

Pauta Examen: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer

Auxiliar: Emilio Vilches

12 de Junio de 2008

P1. Desarrollar en Serie de Laurent la función de variable compleja f definida por

$f(z) = \frac{2z+3}{z^2-3z+2}$ entorno al punto $z_0 = 2$.

En base al resultado anterior, calcule la integral $\oint_{\Gamma} \frac{2z+3}{z^2-3z+2}$ si Γ es la circunferencia de ecuación $|z-2|=1$ recorrida en sentido antihorario.

Solución.

Desarrollando $f(z)$ en fracciones parciales

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2-3z+2} = \frac{2z+3}{(z-2)(z-1)} = \frac{7}{z-2} - \frac{5}{z-1}$$

como buscamos el desarrollo en Laurent en torno a $z_0 = 2$, debemos desarrollar $\frac{1}{z-1}$. Luego

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k \quad \text{si } |z-2| < 1.$$

Así la serie de Laurent de $f(z)$ en torno a $z_0 = 2$ está dada por:

$$f(z) = \frac{7}{z-2} - 5 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k \quad \text{si } |z-2| < 1.$$

Usando lo anterior

$$\oint f(z) dz = \oint \frac{7}{z-2} - 5 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k dz = \oint \frac{7}{z-2} dz = 7 \cdot 2\pi i = 14\pi i.$$

P2. Utilizando el teorema de Gauss probar que:

$$\iint_{\Sigma} f \frac{\partial g}{\partial n} d\Sigma = \iint_{\Sigma} g \frac{\partial f}{\partial n} d\Sigma$$

Donde Σ es una superficie cerrada, simple, seccionalmente regular, orientada positivamente ($\hat{n}$ normal unitaria exterior) que es frontera de una región $A \subset \mathbb{R}^3$, además f y g son campos escalares armónicos sobre A , siendo $\frac{\partial f}{\partial n}$ y $\frac{\partial g}{\partial n}$ las derivadas direccionales de f y g en la dirección y sentido de $\hat{n}$.

Solución.

veamos primero que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \nabla g) &= \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g \\ \operatorname{div}(g \nabla f) &= \nabla g \cdot \nabla f + g \nabla^2 f \end{aligned}$$

pero f y g son armónicos, es decir $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$, luego

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \nabla g) &= \nabla f \cdot \nabla g \\ \operatorname{div}(g \nabla f) &= \nabla g \cdot \nabla f \end{aligned}$$

así

$$\operatorname{div}(f \nabla g) = \operatorname{div}(g \nabla f)$$

integrando sobre A ;

$$\iiint_A \operatorname{div}(f \nabla g) dV = \iiint_A \operatorname{div}(g \nabla f) dV$$

dado que Σ es una superficie cerrada, simple, seccionalmente regular, orientada positivamente, se puede aplicar el teorema de Gauss y por lo tanto

$$\iint_{\Sigma} f \nabla g \cdot \hat{n} d\Sigma = \iint_{\Sigma} g \nabla f \cdot \hat{n} d\Sigma$$

Usando que $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \hat{n}$ y $\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \hat{n}$ se concluye que

$$\iint_{\Sigma} f \frac{\partial g}{\partial n} d\Sigma = \iint_{\Sigma} g \frac{\partial f}{\partial n} d\Sigma$$

P3. Resolver el problema de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t} && \text{con } \alpha^2 \text{ cte.} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 && t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) && 0 \leq x \leq l \end{aligned}$$

Solución.

Separando variables $u(x, t) = \Psi(x)\Phi(t)$.

$$\Psi''(x)\Phi(t) = \frac{1}{\alpha^2} \Psi(x)\Phi'(t)$$

luego

$$\frac{\Psi''(x)}{\Psi(x)} = \frac{\Phi'(t)}{\alpha^2 \Phi(t)} = -\lambda^2$$

con lo que se obtienen ecuaciones para Φ y Ψ .

$$\begin{aligned} \Psi''(x) + \lambda^2 \Psi(x) &= 0 \\ \Phi'(t) + \alpha^2 \lambda^2 \Phi(t) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo lo anterior

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x) \\ \Phi(t) &= c e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \end{aligned}$$

así

$$u(x, t) = (a \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x)) c e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} = (A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)) e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}$$

ahora imponemos condiciones de borde.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (A \lambda \cos(\lambda x) - B \lambda \sin(\lambda x)) e^{-\alpha^2 \lambda^2 t}$$

i)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow A = 0$$

ii)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow \sin(\lambda l) = 0$$

por lo tanto

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad n \in \mathbb{N}$$

con esto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

ahora imponemos la condición inicial.

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = f(x)$$

por lo tanto $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$ y así finalmente

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}; \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

- P4.** (a) Resolver en el plano complejo las ecuaciones $e^z = i$, $\sin z = i$
 (b) Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy, calcular la integral

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$$

Si Γ es la circunferencia de ecuación $|z| = 1$.

Solución.

- (a) i) Sea $z = x + iy$, entonces $i = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. igualando parte real e imaginaria llegamos al sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= 0 \\ e^x \sin y &= 1 \end{aligned}$$

de la primera ecuación se obtiene que $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$. ahora si n es par se obtiene que $e^x = 1$, es decir $x = 0$ y si n es impar no hay solución. finalmente

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{2} + n\pi & n \text{ par} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ii) $\sin z = i$:

Sea $z = x + iy$, entonces $i = \sin z = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$, igualando parte real e imaginaria llegamos al sistema de ecuaciones;

$$\begin{aligned} \cosh y \sin x &= 0 \\ \sinh y \cos x &= 1 \end{aligned}$$

luego de la primera ecuación se obtiene que $x = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. reemplazando en la segunda se obtiene que si n es par $y = \operatorname{arcsinh}(1)$ y que si n es impar $y = -\operatorname{arcsinh}(1)$. en resumen

$$\begin{aligned} x &= n\pi & n \in \mathbb{Z} \\ y &= \operatorname{arcsinh}(1) & n \text{ par} \\ y &= \operatorname{arcsinh}(-1) & n \text{ impar} \end{aligned}$$

- (b) Usando la fórmula de Cauchy;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} f(z_0)$$

y considerando $f(z) = \frac{e^z \cos(\pi z)}{z+2}$ y $z_0 = 0$, se obtiene que:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z \cos(\pi z)}{z^2 + 2z} dz = 2\pi i f(0) = \pi i$$

- P5.** (a) Probar que si $\nabla^2 f(r) = 0$, entonces $f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$, donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y C_1, C_2 son constantes reales.
- (b) Probar que el vector unitario $\hat{e}_\varphi$ del sistema de coordenadas esféricas es selenoidal, pero no irrotacional.
- Obs.: φ es el ángulo que barre el plano XY .

Solución.

- (a) Usando las fórmula del Laplaciano en coordenadas esféricas;

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(r)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial \phi^2}$$

pero f no depende de θ ni de ϕ , luego

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) = 0$$

por lo que

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{c}{r^2}$$

y así

$$f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$$

- (b) Sea $\vec{F} = 1 \cdot \hat{e}_\phi$.
- i) Calculemos la divergencia:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot 0)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot 0)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(1)}{\partial \phi} = 0$$

luego $\vec{F}$ es selenoidal.

ii) Calculemos el rotor:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta \cdot 1)}{\partial \theta} - \frac{\partial(0)}{\partial \phi} \right) + \frac{\hat{\theta}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(0)}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \sin \theta \cdot 1)}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\phi}}{r} \left(\frac{\partial(r \cdot 0)}{\partial r} - \frac{\partial(0)}{\partial \theta} \right)$$

así

$$\text{rot}(\vec{F}) = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \cos \theta - \frac{\hat{\theta}}{r}$$

y $\vec{F}$ es irrotacional.