

## Capítulo 6

# Series de Laurent

### Objetivos

- Saber calcular series de Laurent de funciones holomorfas.
- Utilizar los residuos de series de Laurent para el cálculo de integrales.

### 6.1. Ceros de funciones holomorfas

En este tema trataremos de extender la noción de series de Taylor a funciones con polos, introduciendo términos adicionales con potencias negativas. Uno de esos coeficientes nuevos, el residuo, será de gran importancia para calcular integrales de funciones complejas.

Para fijar ideas, definiremos un **cero** de una función holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  como un valor  $z_0 \in U$  tal que  $f(z_0) = 0$ . Diremos que es un **cero de orden**  $r$  si  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(r-1)}(z_0) = 0$  y  $f^{(r)}(z_0) \neq 0$ . Es decir, el orden del cero es el primer orden de derivada que no se anula en  $z_0$ . Hablaremos así de ceros simples, dobles, triples...

Si  $z_0$  es un cero de orden  $r$  de una función holomorfa  $f$ , es claro que los coeficientes de la serie de Taylor centrada en  $z_0$ ,  $a_0 = f(z_0), \dots, a_{r-1} = f^{(r-1)}(z_0)/(r-1)!$  son nulos,  $a_r \neq 0$ , y podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n=r}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^r g(z), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r} (z - z_0)^n,$$

donde  $g(z_0) \neq 0$ . Si no, el orden sería superior a  $r$ . Además la función  $g$  es holomorfa en la bola  $B(z_0; \rho)$ , siendo  $\rho$  el radio de convergencia de la serie de  $f$ , como se comprueba sin más que aplicar el criterio del cociente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+r+1}}{a_{n+r}} = \frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad \square$$

A diferencia de las funciones derivables reales, que podían anularse en un abierto y no ser trivialmente nulas, las funciones holomorfas complejas sólo pueden tener ceros aislados:

**Teorema 6.1.1** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en un abierto conexo  $U$ . Si  $f$  no es la función nula en  $U$ , sus ceros son aislados.

Sea  $z_0$  un cero de  $f$ . Pueden darse dos situaciones:

O bien no existe una bola abierta  $B(z_0; r) \subset U$  en la que  $f$  se anule, en cuyo caso habrá una derivada  $f^{(r)}(z_0)$  no nula. Si se anulaban todas las derivadas, la función tendría serie de Taylor nula y sería la función nula en alguna bola. Así pues,  $z_0$  es un cero de  $f$  algún orden  $r \geq 1$ .

Por tanto, podemos factorizar  $f(z) = (z - z_0)^r g(z)$  con  $g$  holomorfa en una bola  $B(z_0; \rho)$  y  $g(z_0) \neq 0$ . Como  $f$  es continua, existirá una bola  $B(z_0; \rho')$ , con  $\rho' < \rho$  en la cual  $g$  no se anula y, por tanto,  $f$  se anula sólo en  $z_0$  en dicha bola. Así pues, el cero  $z_0$  es aislado, pues tiene un entorno en el cual no hay más ceros de  $f$ .

O bien existe una bola abierta  $B(z_0; r) \subset U$  en la que  $f$  se anula. Veamos que este caso no es posible:

Denotemos por  $C$  el conjunto de puntos  $z_0$  para los cuales  $f$  se anula en alguna bola abierta  $B(z_0; r) \subset U$ . Por una parte,  $C$  es abierto, porque todo  $z_0$  tiene un entorno abierto contenido en  $C$ , la propia bola abierta  $B(z_0; r)$ .

Pero también  $C$  es un cerrado. Tomemos una sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$  convergente a un valor  $w \in U$ . Es decir,  $w$  es un punto adherente a  $C$ . Como las derivadas de todos los órdenes son continuas, las sucesiones  $\{f^{(r)}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$  convergen a  $f^{(r)}(w)$ . Y como los puntos  $z_n$  pertenecen a  $C$ , todas esas derivadas son nulas y, por tanto, también  $f^{(r)}(w) = 0$ , para todo  $r$ . Por tanto, como la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $w$  es nula, la función es nula en alguna bola abierta centrada en  $w$ . Con lo cual  $w$ , punto adherente a  $C$ , pertenece a  $C$  y, por tanto,  $C$  es cerrado, por coincidir con su adherencia.

Así pues,  $C$  es abierto y cerrado. Como  $U$  es conexo,  $C$  sólo puede ser  $U$  o el conjunto vacío. Es decir, o bien,  $f$  es la función nula, caso excluido por nuestra hipótesis, o bien no hay ningún punto con un entorno abierto donde la función se anule.  $\square$

Una consecuencia importante de este resultado es la escasa flexibilidad de las funciones holomorfas frente a las funciones diferenciables:

**Corolario 6.1.1** Sean  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones holomorfas distintas. Entonces, no pueden coincidir más que en puntos aislados de  $U$ .

Denotemos  $f = f_1 - f_2$ . La función  $f$  sólo se anula en puntos aislados, por lo que  $f_1, f_2$  sólo coinciden en puntos aislados.  $\square$

## 6.2. Series de Laurent

Tal como nos propusimos, extendemos el concepto de serie de potencias a potencias inversas. Definimos una **serie de Laurent** centrada en  $z_0 \in \mathbb{C}$  como una expresión

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (6.1)$$

La serie de potencias negativas se denomina **parte principal** de la serie de Laurent.

Diremos que la serie converge en un punto  $z \in \mathbb{C}$  si convergen las dos series a la vez.

El análisis de la convergencia de la serie de potencias  $\sum a_n(z-z_0)^n$  se reduce, como sabemos, a conocer su radio de convergencia  $\rho$ .

La serie de potencias inversas se puede reducir a una serie de potencias centrada en el origen, tomando  $w = (z - z_0)^{-1}$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n ,$$

que tendrá un radio de convergencia  $\tilde{\rho}$ .

Es decir, la serie inversa convergerá absolutamente para  $|z - z_0| > 1/\tilde{\rho}$  y divergerá para  $|z - z_0| < 1/\tilde{\rho}$ .

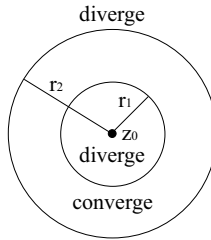


Figura 6.1: Corona  $C(z_0; r_1, r_2)$  de convergencia de una serie de Laurent

Por tanto, para que haya una región de convergencia, deberá ocurrir que  $\rho > \tilde{\rho}^{-1}$ . En ese caso el dominio de convergencia será una corona de radios  $\tilde{\rho}^{-1}$  y  $\rho$ , donde, aparte de converger absolutamente la serie, también convergerá uniformemente en cualquier cerrado contenido en ella. Denotaremos las coronas como

$$C(z_0; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\} . \quad (6.2)$$

**Ejemplo 6.2.1** *Obtener la corona de convergencia de la serie de Laurent,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \frac{1}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z - z_0)^n .$$

El radio de convergencia de la serie de potencias se obtiene por el criterio del cociente,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} , \quad \rho = \frac{1}{\lambda} = 2 .$$

Y, del mismo modo, el radio de convergencia de la parte principal,

$$\tilde{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} .$$

Con lo cual concluimos que la región de convergencia de la serie de Laurent es la corona  $C(z_0; 1/3, 2)$ , independientemente del valor  $z_0$  en el que esté centrada la serie.

**Teorema 6.2.1 Teorema de Laurent:** Sea  $f$  una función holomorfa en una corona  $C(z_0; r_1, r_2)$ . Entonces existe una única serie de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

convergente en la corona  $C(z_0; r_1, r_2)$  y convergente uniformemente en cualquier cerrado contenido en ella.

Sea  $z$  un punto de la corona. Tomemos dos curvas cerradas,  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , homólogas módulo  $C(z_0; r_1, r_2)$ , tal que  $z$  esté comprendido entre ambas, para que el índice de  $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$  respecto de  $z$  sea la unidad. Por la fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw .$$

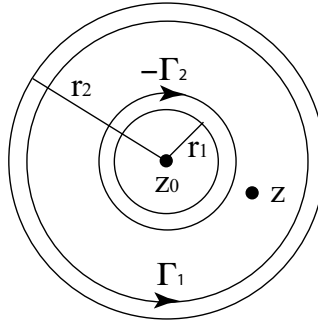


Figura 6.2: Teorema de Laurent

Como el punto  $z$  está en el interior de  $\Gamma_1$ , podemos desarrollar su integrando como serie geométrica de razón  $(z - z_0)/(w - z_0)$ , ya que  $|z - z_0| < |w - z_0|$ ,

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1/(w - z_0)}{1 - (z - z_0)/(w - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} .$$

Del mismo modo, como  $z$  está en el exterior de  $\Gamma_2$ , podemos desarrollar su integrando como serie geométrica de razón  $(w - z_0)/(z - z_0)$ , ya que  $|w - z_0| < |z - z_0|$ ,

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1/(z - z_0)}{1 - (w - z_0)/(z - z_0)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} .$$

Y como ambas series convergen uniformemente, podemos permutar integrales y límites,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_1} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{i2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad a_n = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw . \end{aligned}$$

Del mismo modo, la integral a lo largo de  $\Gamma_2$ ,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_2} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw \\
&= \frac{1}{i2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \int_{\Gamma_2} f(w)(w-z_0)^n dw \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, \quad a_{-n} = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma_2} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw.
\end{aligned}$$

Con lo cual hemos identificado todos los coeficientes de la serie de Laurent y comprobado que las series son convergentes. Además, de la convergencia absoluta se sigue la convergencia uniforme en cerrados contenidos en la corona de convergencia.

La unicidad es trivial. Si existiera una serie de Laurent de  $f$  en la misma corona, definida por  $f(z) = \sum b_n(z-z_0)^n$ , podríamos calcular sus coeficientes  $a_n$  por las fórmulas que enuncia el teorema. Pero la convergencia uniforme permite alterar el orden de límites e integrales y las fórmulas nos conducirían, integrando término a término de la serie, a que  $a_n = b_n$ .  $\square$

Obviamente, si  $f$  fuera holomorfa en el interior de  $\Gamma_2$ , todos los coeficientes  $a_{-n}$  serían nulos y la serie de Laurent se reduciría a la serie de Taylor. usando la fórmula generalizada de Cauchy.

Una misma función puede tener series de Laurent distintas en diferentes coronas:

**Ejemplo 6.2.2** *Series de Laurent de la función  $f(z) = 1/(1-z)$ .*

Sabemos que la función  $f$  es holomorfa salvo en  $z = 1$ . Por ello, si tratamos de obtener series de Laurent centradas en el origen, debemos distinguir dos coronas,  $B(0;1)$  y  $C(0;1,\infty)$ .

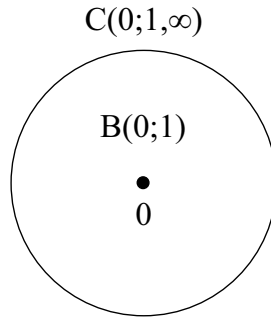


Figura 6.3: Coronas de convergencia de la función  $f(z) = 1/(1-z)$

En la bola abierta  $B(0;1)$ , la serie de Laurent coincide con la serie de McLaurin, ya que la función es holomorfa,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

En cambio, en la corona  $C(0; 1, \infty)$ , la serie de Laurent se puede obtener como serie geométrica de razón  $1/z$ ,

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1.$$

Otras series de Laurent se pueden obtener por composición:

**Ejemplo 6.2.3** *Serie de Laurent de  $f(z) = e^{1/z}$ .*

Esta función es holomorfa salvo en  $z = 0$ , por lo que admite serie de Laurent en la corona  $C(0; 0, \infty)$ , que podemos obtener a partir de la serie de McLaurin de la exponencial,

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad w = \frac{1}{z}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

O por cociente de series de Taylor o de Laurent conocidas:

**Ejemplo 6.2.4** *Sea  $h(z) = f(z)/g(z)$  un cociente de funciones holomorfas en una bola abierta  $B(z_0; r)$  y  $z_0$  es el único cero de  $g$  en dicha bola.*

En estas condiciones,  $h$  es holomorfa y admite una serie de Laurent en la corona  $C(z_0; 0, r)$ .

Si  $z_0$  es un cero de orden  $r$ ,  $g(z) = (z - z_0)^r G(z)$ , donde  $G$  es una función holomorfa y sin ceros en la bola  $B(z_0; r)$ . Asimismo  $1/G$  es también una función holomorfa y admite una serie de Taylor  $1/G(z) = \sum b_n(z - z_0)^n$ . Por tanto, la serie de Laurent de  $h$  será de la forma

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z - z_0)^m \frac{1}{(z - z_0)^r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

donde  $\sum a_m(z - z_0)^m$  es la serie de Taylor de la función  $f$ .

**Ejemplo 6.2.5** *Serie de Laurent de la función  $h(z) = \cot z$ .*

Las funciones  $f(z) = \cos z$  y  $g(z) = \sin z$  son enteras. La función  $g$  se anula en  $z_0 = n\pi$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ . Por tanto, la función cotangente es holomorfa y tiene serie de Laurent en la corona  $C(0; 0, \pi)$ .

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(z^6), \quad \sin z = z \left( 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + O(z^6) \right).$$

Como el cero de  $\sin z$  es simple en el origen, la serie de Laurent de la cotangente será de la forma  $h(z) = 1/z \sum c_n(z - z_0)^n$ . Usando la igualdad  $\cos z = \sin z \cot z$ ,

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(z^6) = \left( 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \right) (c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4) + O(z^6),$$

despejamos los coeficientes de la serie de Laurent de  $\cot z$ ,

$$\cot z = \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{45} + O(z^6) \right).$$

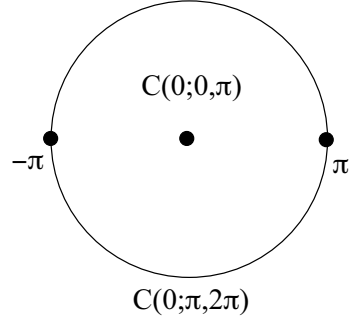


Figura 6.4: Coronas de convergencia de la función  $f(z) = \cot z$

### 6.3. Residuos

Un caso particular dentro de las funciones representables por series de Laurent es aquel en el que las singularidades son aisladas. Decimos que una función  $f$  tiene una **singularidad aislada** en  $z_0 \in \mathbb{C}$  si  $f$  es holomorfa en alguna bola perforada  $C(z_0; 0, r)$ . Es decir, si admite una serie de Laurent convergente en dicha bola perforada,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

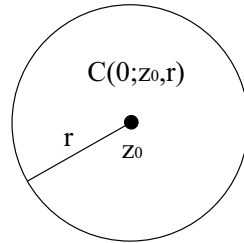


Figura 6.5: Bola perforada  $C(z_0; 0, r)$

Denominaremos **residuo** de la función  $f$  en  $z_0$  al coeficiente  $a_{-1}$  de su serie de Laurent.

Las singularidades aisladas pueden ser de tres tipos y se caracterizan por los límites

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0 , \quad n \in \mathbb{N} .$$

1. Singularidad evitable: Si  $a_{-n} = 0$ , para todo valor de  $n$ . No hay coeficientes negativos en la serie de Laurent. Por ejemplo, la función  $f(z) = \sin z/z$  tiene una singularidad evitable en el origen.

Se caracteriza porque todos los límites son nulos y existe el límite cuando  $n = 0$ .

En este caso,  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ , ya que no hay coeficientes de índice negativo.

2. Polo de orden  $r$ : Si  $a_{-n} = 0$ , para  $n > r$ . Existen un número finito de coeficientes negativos. Por ejemplo, la función  $f(z) = 1/z^3$  tiene un polo de orden tres en el origen. Su residuo es nulo en este caso.

Se caracteriza porque no existen los límites para  $n < r$ .

En este caso el residuo se puede calcular por la expresión

$$\text{Res } (f, z_0) = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} ((z - z_0)^r f(z)) . \quad (6.3)$$

Lo comprobamos directamente,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^r \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \\ (z - z_0)^r f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-r} (z - z_0)^n = a_{-r} + \cdots + a_{-1} (z - z_0)^{r-1} + O((z - z_0)^r) , \\ \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} ((z - z_0)^r f(z)) &= (r-1)! a_{-1} + O((z - z_0)) . \quad \square \end{aligned}$$

3. Singularidad esencial: No hay ningún orden  $r$  a partir del cual todos los coeficientes  $a_{-n}$  sean nulos. Existen infinitos coeficientes negativos. Por ejemplo, la función  $f(z) = e^{1/z}$  tiene una singularidad esencial en el origen.

Se caracteriza porque no existe ningún límite para ningún valor de  $n$ .

En este caso el residuo se tiene que calcular directamente de la expresión de la serie. Por ejemplo, para  $f(z) = e^{1/z}$  el residuo en el origen es  $\text{Res } (f, 0) = 1$ .

**Ejemplo 6.3.1** *Residuo de la función  $f(z) = e^z/z$  en el origen.*

La función  $f$  es holomorfa salvo en el origen, que es un polo simple. Como

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1 , \quad \text{Res } (f, 0) = 1 .$$

**Ejemplo 6.3.2** *Residuo de la función  $f(z) = \cos z/z^2$  en el origen.*

La función  $f$  es holomorfa salvo en el origen, que es un polo doble, ya que el primer límite definido es

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1 , \quad \text{Res } (f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = - \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 0 .$$

**Teorema 6.3.1 Teorema de los residuos:** Sea  $U$  un subconjunto simplemente conexo de  $\mathbb{C}$ . Sea  $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Sea  $\Gamma$  un ciclo contenido en  $U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ . Entonces,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = i2\pi \sum_{n=1}^N n(\Gamma, z_n) \text{Res } (f, z_n) . \quad (6.4)$$



Este teorema es un simple compendio de resultados anteriores. El ciclo  $\Gamma$  es homólogo a  $n(\Gamma, z_1)\Gamma_1 + \cdots + n(\Gamma, z_N)\Gamma_N$ , siendo  $\Gamma_n$  una circunferencia centrada en  $z_n$ , orientada positivamente, de radio suficientemente pequeño para que esté contenida en el dominio de holomorfía de  $f$  y rodee sólo a la singularidad  $z_n$ . Por tanto, podemos descomponer la integral,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^N n(\Gamma, z_n) \int_{\Gamma_n} f(z) dz .$$

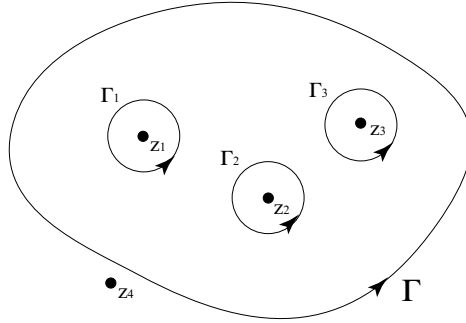


Figura 6.6: Teorema de los residuos

Como  $f$  es holomorfa en alguna corona  $C(z_n; 0, r)$ , que contiene a  $\Gamma_n$ , tendremos series de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_n)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_n)^n ,$$

y como estas series convergen uniformemente en  $\Gamma_n$ , podemos permutar el orden de límites e integrales,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} f(z) dz &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_{\Gamma_n} \frac{dz}{(z - z_n)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\Gamma_n} (z - z_n)^n dz = i2\pi a_{-1} \\ &= i2\pi \text{Res} (f, z_n) . \end{aligned}$$

Sumando todas las contribuciones de las circunferencias, obtenemos la expresión buscada,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^N n(\Gamma, z_n) \int_{\Gamma_n} f(z) dz = i2\pi \sum_{n=1}^N n(\Gamma, z_n) \text{Res} (f, z_n) . \quad \square$$

**Ejemplo 6.3.3** *Cálculo de la integral de la función  $f(z) = \sin(1/z)$  a lo largo de una circunferencia de radio  $R$ , centrada en el origen, orientada positivamente.*

La función  $f$  es holomorfa salvo en el origen, donde tiene una singularidad esencial, como muestra su serie de Laurent,

$$\sin w = w - \frac{w^3}{6} + O(w^5) , \quad \sin(1/z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + O(z^{-5}) ,$$

de la cual leemos el valor del residuo  $a_{-1} = 1$ . Por tanto,

$$\int_{\Gamma} \sin(1/z) dz = i2\pi .$$

Las series de Laurent fundamentan la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites:

Sean  $f, g$  dos funciones holomorfas en alguna bola alrededor de  $z_0$ , de modo que  $z_0$  es un cero de orden  $r_1$  para  $f$  y un cero de orden  $r_2$  para  $g$ . Entonces, si  $r_2 > r_1$ ,  $z_0$  es un polo de orden  $r_2 - r_1$  para el cociente  $f(z)/g(z)$ , ya que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)^{r_1} F(z)}{(z - z_0)^{r_2} G(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{r_2 - r_1}} \frac{F(z)}{G(z)} . \quad \square$$

**Teorema 6.3.2 Regla de L'Hôpital:** Sean  $f, g$ , dos funciones holomorfas en alguna bola alrededor de  $z_0$ , de modo que  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(r-1)}(z_0) = 0$ ,  $g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(r-1)}(z_0) = 0$ ,  $g^{(r)}(z_0) \neq 0$ , para  $r > 0$ . Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(r)}(z_0)}{g^{(r)}(z_0)} . \quad (6.5)$$

La demostración es bien sencilla, usando las series de Taylor de ambas funciones,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_r(z - z_0)^r + O((z - z_0)^{r+1})}{b_r(z - z_0)^r + O((z - z_0)^{r+1})} = \frac{a_r + O((z - z_0))}{b_r + O((z - z_0))} ,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_r}{b_r} = \frac{f^{(r)}(z_0)}{g^{(r)}(z_0)} . \quad \square$$

Este resultado se aplica al cálculo de polos y residuos:

**Ejemplo 6.3.4** La función  $f(z) = \sin z/z$  tiene una singularidad evitable en el origen.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1 .$$

## 6.4. Cálculo de integrales

El teorema de los residuos, aparte de su aplicación inmediata al cálculo de integrales a lo largo de ciclos, tiene su interés para el cálculo de integrales en la recta real:

**Ejemplo 6.4.1** Integral de una función continua  $f$ ,

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt = \int_{\Gamma} f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{i2}\right) \frac{dz}{iz} , \quad (6.6)$$

donde  $\Gamma$  es la circunferencia de radio unidad, centrada en el origen, orientada positivamente.

Para expresar la integral real como una integral en el dominio complejo, parametrizamos la circunferencia por medio de  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\gamma'(t) = ie^{it} = i\gamma(t)$ .

Este tipo de integrales se pueden resolver por medio de residuos, siempre que el integrando no presente singularidades.

**Ejemplo 6.4.2** Calcular la integral  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$ .

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2 + (z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{1 + 4z + z^2}.$$

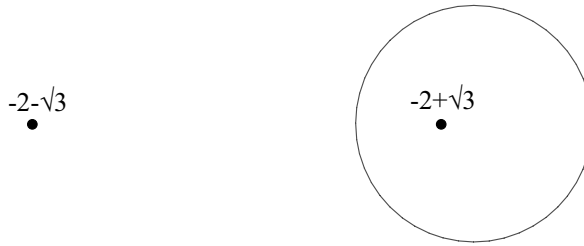


Figura 6.7: Polos de  $f(z) = 1/(1 + 4z + z^2)$

El integrando es una función holomorfa salvo en  $z = -2 \pm \sqrt{3}$ , que son polos simples. Sólo  $z_1 = -2 + \sqrt{3}$  está en el interior de la circunferencia  $\Gamma$ . Por tanto, usando la regla de L'Hôpital,

$$\text{Res} \left( \frac{1}{1 + 4z + z^2}, z_1 \right) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{1 + 4z + z^2} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4 + 2z} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = 4\pi \text{Res} \left( \frac{1}{1 + 4z + z^2}, -2 + \sqrt{3} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

## 6.5. Integrales en la recta real

También integrales impropias sobre toda la recta real pueden extenderse al campo complejo y resolverse haciendo uso de los residuos:

**Ejemplo 6.5.1** Sea  $f$  una función holomorfa en  $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > -a\}$  para algún valor  $a > 0$ , salvo en un conjunto finito de polos,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , situados fuera del eje real. Si  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$  en  $U$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n). \quad (6.7)$$

La condición de que  $f$  es continua en el eje real, junto con el hecho de que  $zf(z)$  tienda a cero cuando  $z$  tiende a infinito, garantiza que la integral impropia es convergente y la podemos calcular por el valor principal,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(z) dz ,$$

donde  $I_R$  es el intervalo real  $[-R, R]$ .

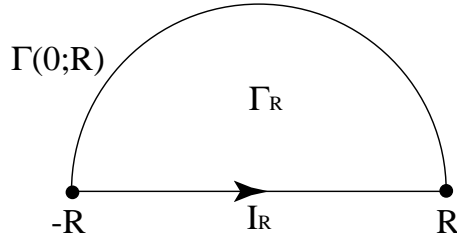


Figura 6.8: Integrales sobre la recta real

Esta integral se puede extender al dominio complejo, cerrando un circuito  $\Gamma_R$  con la semicircunferencia superior centrada en el origen,  $\Gamma(0; R)$ ,

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{I_R} f(z) dz + \int_{\Gamma(0;R)} f(z) dz .$$

Sólo falta comprobar que la integral a lo largo de la semicircunferencia tiende a cero cuando el radio  $R$  tiende a infinito para constatar la igualdad de las expresiones,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma(0;R)} f(z) dz .$$

Una vez comprobado este punto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = i2\pi \sum_{n=0}^N \text{Res} (f, z_n) ,$$

aplicando el teorema de los residuos al recinto encerrado por  $\Gamma_R$ , para un radio suficientemente grande para que la semicircunferencia rodee a todas las singularidades aisladas.  $\square$

Queda pendiente verificar que la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero, pero eso es consecuencia del siguiente lema:

**Lema 6.5.1** *Sea  $f$  una función continua en la región infinita  $C$  comprendida entre un arco de circunferencia  $\Gamma_R$  y las semirrectas correspondientes a los ángulos  $\phi_1, \phi_2$ . Si  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$  en  $C$ , entonces.*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0 .$$

Acotamos la integral,

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq R(\phi_2 - \phi_1) \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| = (\phi_2 - \phi_1) |z| \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| ,$$

que tiende a cero cuando el radio tiende a infinito, por la hipótesis del lema.  $\square$

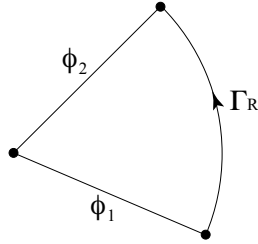


Figura 6.9: Lema integral

El mismo tipo de razonamientos se puede aplicar al caso en el que la función es holomorfa en el semiplano inferior, salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas:

**Ejemplo 6.5.2** Sea  $f$  una función holomorfa en  $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < a\}$  para algún valor  $a > 0$ , salvo en un conjunto finito de polos,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , situados fuera del eje real. Si  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$  en  $U$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n) . \quad (6.8)$$

El signo menos proviene de que en este caso debemos cerrar el circuito con la semicircunferencia inferior y estará recorrido, por tanto, en sentido negativo.

**Ejemplo 6.5.3** Calcular la integral impropia  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

Los polos de la función  $f(z) = 1/(1+z^2)$  son  $z = \pm i$ , con lo cual podemos emplear para resolver la integral cualquiera de los dos ejemplos anteriores.

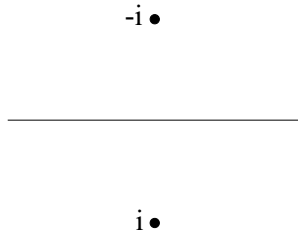


Figura 6.10: Polos de  $f(z) = 1/(1+z^2)$

Si utilizamos el semiplano superior, como el único polo en esta región es  $z = i$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = i2\pi \text{Res}(f, i) = i2\pi \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{1+z^2} = i2\pi \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2z} = \pi.$$

Si utilizamos el semiplano inferior, como el único polo en esta región es  $z = -i$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -i2\pi \text{Res}(f, -i) = -i2\pi \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+i}{1+z^2} = -i2\pi \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{2z} = \pi.$$

Otro tipo de integrales que se pueden resolver también por residuos son las integrales de Fourier:

**Ejemplo 6.5.4** Sea  $f$  una función holomorfa en  $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > -a\}$  para algún valor  $a > 0$ , salvo en un conjunto finito de polos,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , situados fuera del eje real. Para  $k > 0$ , si  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $U$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx = i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z)e^{ikz}, z_n). \quad (6.9)$$

Por supuesto, la misma integral se puede calcular en el semiplano inferior para valores negativos de  $k$ :

**Ejemplo 6.5.5** Sea  $f$  una función holomorfa en  $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < a\}$  para algún valor  $a > 0$ , salvo en un conjunto finito de polos,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , situados fuera del eje real. Para  $k < 0$ , si  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $U$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx = -i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f(z)e^{ikz}, z_n). \quad (6.10)$$

El razonamiento es idéntico que para las demás integrales impropias, sólo que hay justificar de manera distinta que las integrales a lo largo de arcos de circunferencia tienden a cero para radios grandes, ya que la hipótesis sobre  $f$  es más débil:

**Lema 6.5.2 Lema de Jordan:** Sea  $f$  una función continua en la región infinita  $C$  comprendida entre un arco de circunferencia  $\Gamma_R$  y las semirrectas correspondientes a los ángulos  $0 \leq \phi_1 < \phi_2 \leq \pi$ . Si  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  en  $C$ , entonces,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)e^{ikz} dz = 0.$$

Desarrollamos la integral, parametrizando  $\Gamma_R$  mediante  $\gamma(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [\phi_1, \phi_2]$ ,

$$I := \int_{\Gamma_R} f(z)e^{ikz} dz = iR \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(\gamma(t))e^{kR(i \cos t - \sin t)} e^{it} dt.$$

Teniendo en cuenta que las exponenciales imaginarias tienen módulo unidad, acotamos la integral,

$$|I| \leq R \int_{\phi_1}^{\phi_2} |f(\gamma(t))| e^{-kR \sin t} dt \leq R \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \int_{\phi_1}^{\phi_2} e^{-kR \sin t} dt.$$

Extendemos al intervalo  $[0, \pi]$  la integral y aprovechamos la simetría de la función seno,

$$|I| \leq R \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \int_0^\pi e^{-kR \sin t} dt = 2R \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin t} dt ,$$

para reducir la integral al intervalo  $[0, \pi/2]$ , donde el seno es creciente.

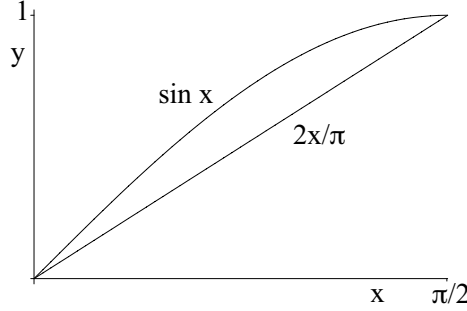


Figura 6.11: Acotación del seno por una recta

Finalmente, como  $\sin t \geq 2t/\pi$  en el intervalo  $[0, \pi/2]$ ,

$$\begin{aligned} |I| &\leq 2R \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-2kRt/\pi} dt = -\frac{\pi}{k} \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \left[ e^{-2kRt/\pi} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{k} \sup_{z \in \Gamma_R} |f(z)| (1 - e^{-kR}) , \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando el radio tiende a infinito, por la hipótesis del lema.  $\square$

**Ejemplo 6.5.6** *Integral de Fourier de  $f(x) = 1/(1+x^2)$ .*

Como la extensión de  $f$  al dominio complejo sólo tiene singularidades aisladas,  $z = \pm i$ , podemos calcular la integral de Fourier por el teorema de los residuos.

Para  $k > 0$ , denotando  $g(z) = e^{ikz}/(1+z^2)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx = i2\pi \text{Res}(g, i) = i2\pi \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{1+z^2} e^{ikz} = i2\pi \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{ikz}}{z+i} = \pi e^{-k}.$$

Y para  $k < 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx &= -i2\pi \text{Res}(g, -i) = -i2\pi \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+i}{1+z^2} e^{ikz} \\ &= -i2\pi \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{ikz}}{z-i} = \pi e^k, \end{aligned}$$

con lo cual podemos concluir, juntando ambos resultados,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}.$$

## 6.6. Integrales en la semirrecta real positiva

Las funciones que presentan cortes en su dominio de holomorfa son muy útiles para calcular integrales sobre la recta real:

**Ejemplo 6.6.1** Sea  $f$  una función holomorfa en todo el dominio complejo salvo en un conjunto finito de singularidades,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , ninguna de ellas en la semirrecta real positiva. Además,  $f(x)$  es real, para  $x \geq 0$ . Entonces, si  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ ,

$$\int_0^\infty f(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \Re \left\{ \sum_{n=1}^N \text{Res} (g, z_n) \right\}, \quad (6.11)$$

siendo  $g(z) = f(z) ((\ln z)_{2\pi})^2$ .

Integraremos la función  $g$  a lo largo de un circuito,  $\Gamma_{\varepsilon, R}$ , orientado positivamente, formado por la semicircunferencia izquierda,  $\Gamma_\varepsilon$ , centrada en el origen de radio  $\varepsilon$ , la circunferencia,  $\Gamma_R$ , de radio  $R$  centrada en el origen, excepto un pequeño arco en torno a  $(R, 0)$  y los segmentos paralelos al eje real que cierran el circuito. Analicemos cada una de las integrales:

Como ya hemos estudiado, el comportamiento de  $f$  en el infinito nos garantiza que, cuando  $R$  tiende a infinito, la integral a lo largo de  $\Gamma_R$  tiende a cero. La presencia de los logaritmos no altera este resultado.

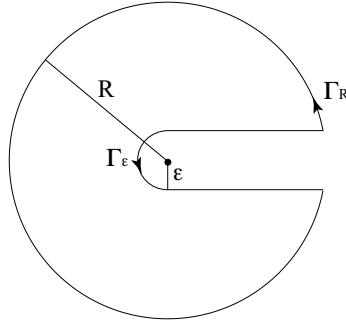


Figura 6.12: Circuito de integración  $\Gamma_{\varepsilon, R}$

A lo largo de  $\Gamma_\varepsilon$ , la integral,

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) \, dz \right| \leq \pi \varepsilon \sup_{z \in \Gamma_\varepsilon} |g(z)| \leq \pi \varepsilon \left( |\log^2 \varepsilon| + \frac{9\pi^2}{4} \right) \sup_{z \in \Gamma_\varepsilon} |f(z)|,$$

tiende a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

Por tanto, sólo nos quedan los dos segmentos, que cuando  $R$  tiende a infinito y  $\varepsilon$  tiende a cero cubren el semieje real positivo. El segmento superior, en sentido positivo y el segmento inferior, en sentido negativo. La diferencia es que en el segmento superior el argumento de  $z$  tiende a cero y en el inferior, a  $2\pi$ . Por tanto, usando el teorema de los residuos,

$$i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res} (g, z_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} g(z) \, dz$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty f(x) \log^2 x \, dx - \int_0^\infty f(x) (\log x + i2\pi)^2 \, dx \\
&= -i4\pi \int_0^\infty f(x) \log x \, dx + 4\pi^2 \int_0^\infty f(x) \, dx ,
\end{aligned}$$

de donde podemos despejar el valor de la integral buscada,

$$\int_0^\infty f(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \Re \left\{ \sum_{n=1}^N \text{Res} (g, z_n) \right\} . \quad \square$$

La parte imaginaria proporciona, por el mismo precio, un método para calcular la integral de  $f$ ,

$$\int_0^\infty f(x) \, dx = -\frac{1}{2\pi} \Im \left\{ \sum_{n=1}^N \text{Res} (g, z_n) \right\} . \quad \square$$

**Ejemplo 6.6.2** Calcular  $\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3} \, dx$ .

La función  $f(z) = 1/(z+1)^3$  tiene un único polo triple,  $z_0 = -1$ , que no está en el semieje real positivo. Por tanto,

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^3} \, dx = -\frac{1}{2} \Re (\text{Res} (g, -1)) = -\frac{1}{2} ,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3} \, dx = -\frac{1}{2\pi} \Im (\text{Res} (g, -1)) = \frac{1}{2} ,$$

$$\text{Res} (g, -1) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} ((\ln z)_{2\pi})^2 = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1 - (\ln z)_{2\pi}}{z^2} = 1 - i\pi .$$

**Ejemplo 6.6.3** Sea  $f$  una función holomorfa en todo el dominio complejo salvo en un conjunto finito de singularidades,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , ninguna de ellas en la semirrecta real positiva. Entonces, si  $\lim_{z \rightarrow \infty} zg(z) = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} zg(z) = 0$ ,

$$\int_0^\infty f(x) x^{a-1} \, dx = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\sin a\pi} \sum_{n=1}^N \text{Res} (g, z_n) , \quad (6.12)$$

para un número real  $a > 0$ , siendo  $g(z) = f(z)(z^{a-1})_{2\pi}$ .

Con estas condiciones sobre  $f$ , garantizamos que existe la integral.

Integraremos la función  $g$  a lo largo de un circuito,  $\Gamma_{\varepsilon, R}$ , idéntico al del ejemplo anterior. Analicemos cada una de las integrales:

Igual que en el ejemplo precedente, el comportamiento de  $f$  en el infinito nos garantiza que, cuando  $R$  tiende a infinito, la integral a lo largo de  $\Gamma_R$  tiende a cero.

A lo largo de  $\Gamma_\varepsilon$ , la integral,

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) \, dz \right| \leq \pi \varepsilon \sup_{z \in \Gamma_\varepsilon} |g(z)| ,$$

tiende a cero cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

Por tanto, sólo nos quedan los dos segmentos, que cuando  $R$  tiende a infinito y  $\varepsilon$  tiende a cero cubren el semieje real positivo. El segmento superior, en sentido positivo y el segmento inferior, en sentido negativo. La diferencia es que en el segmento superior el argumento de  $z$  tiende a cero y en el inferior, a  $2\pi$ . Esto influye, ya que  $z^{a-1} = e^{(a-1)(\ln z)_{2\pi}}$ .

Por tanto, usando el teorema de los residuos,

$$\begin{aligned} i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(g, z_n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} g(z) dz \\ &= \int_0^\infty f(x)x^{a-1} dx - e^{i2\pi(a-1)} \int_0^\infty f(x)x^{a-1} dx \\ &= (1 - e^{i2a\pi}) \int_0^\infty f(x)x^{a-1} dx \\ &= -i2e^{ia\pi} \sin a\pi \int_0^\infty f(x)x^{a-1} dx, \end{aligned}$$

de donde podemos despejar el valor de la integral buscada,

$$\int_0^\infty f(x)x^{a-1} dx = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\sin a\pi} \sum_{n=1}^N \text{Res}(g, z_n) . \quad \square$$

**Ejemplo 6.6.4** Calcular  $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1} dx$ .

Para que la integral converja necesitamos que se verifiquen

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^a}{z+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{a-1} = 0 \Rightarrow a < 1 ,$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^a}{z+1} = \lim_{z \rightarrow 0} z^a = 0 \Rightarrow a > 0 ,$$

por lo que la integral está bien definida si  $0 < a < 1$ .

El único polo del integrando es simple,  $z_0 = -1$ , y no está en el semieje real positivo. Por tanto,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1} dx = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\sin a\pi} \text{Res}(g, -1) = \frac{\pi}{\sin a\pi} ,$$

$$\text{Res}(g, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z^{a-1})_{2\pi} = e^{(a-1)(\ln(-1))_{2\pi}} = e^{i(a-1)\pi} = -e^{ia\pi} .$$

## 6.7. Residuo en el infinito

Aunque el teorema de los residuos suponga una notable generalización de la fórmula de Cauchy y permita el cálculo de numerosas integrales, es cierto que queda pendiente el caso de singularidades no aisladas, tales como cortes.

Una manera de solventar esta deficiencia es introducir el concepto de residuo en el infinito.

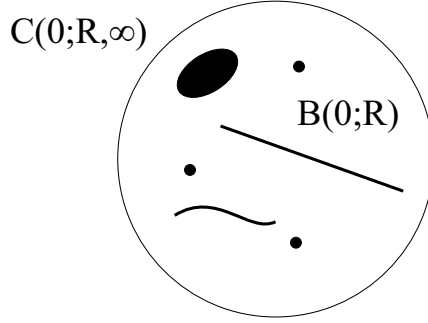


Figura 6.13: Singularidades contenidas en una bola  $B(0; R)$

Sea  $f$  una función holomorfa en la corona  $C(0; R, \infty)$  para un radio  $R$  suficientemente grande. Es decir, se trata de la corona que se extiende hasta el punto del infinito, dejando atrás todas las singularidades, que quedan englobadas en la bola  $B(0; R)$ .

Obsérvese que dentro de la bola  $B(0; R)$  puede haber, no sólo singularidades aisladas, sino singularidades más complejas.

En la corona  $C(0; R, \infty)$  la función  $f$  admite una serie de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n ,$$

que converge uniformemente en cualquier cerrado contenido en la corona. Por tanto, podemos permutar el orden de límites e integrales para cualquier curva cerrada simple,  $\Gamma$ , orientada positivamente, contenida en la corona,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\Gamma} z^n dz = i2\pi a_{-1} .$$

Así pues, la integral depende tan sólo del coeficiente  $a_{-1}$ , que no se puede asignar a ninguna singularidad concreta, por lo que denomina **residuo de  $f$  en el infinito**,  $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$ .

La nomenclatura está clara. Realicemos un cambio de variable dado por la inversión  $w = z^{-1}$ . La serie de Laurent de  $g(w) = f(w^{-1})$  en la nueva variable,

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m w^m , \quad b_m = a_{-m} ,$$

está definida ahora en una corona  $C_w(0; 0, R^{-1})$ , centrada en el punto de infinito,  $w = 0$ , admitiendo que hemos añadido al plano complejo el punto del infinito,

$$C_w(0; 0, R^{-1}) = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < R^{-1}\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} .$$

La imagen de la curva,  $\tilde{\Gamma}$ , rodea únicamente un presumible punto singular, el infinito, que queda excluido de nuestra corona. La integral de  $f$  se puede expresar como

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{g(w)}{w^2} dw = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\tilde{\Gamma}} b_m w^{m-2} dw = i2\pi b_1 = -i2\pi \text{Res}(f, \infty),$$

teniendo en cuenta que el cambio de variable impone  $dz = -dw/w^2$ .

El signo menos para la definición del residuo se impone por coherencia, ya que la curva  $\tilde{\Gamma}$  tiene orientación opuesta a la de  $\Gamma$  cuando se la observa desde el infinito.

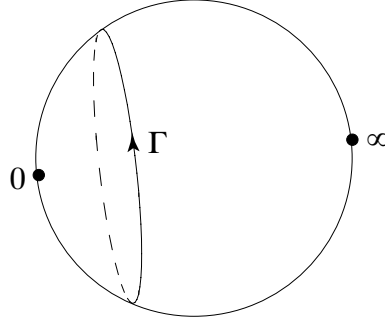


Figura 6.14: La curva  $\Gamma$  cambia de orientación al observarse desde infinito

Este razonamiento proporciona una fórmula sencilla para el cálculo del residuo en el infinito.

Dado que cuando integramos  $g(w)$ , estamos integrando  $-f(w^{-1})/w^2$  en realidad, el residuo en el infinito será

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{f(w^{-1})}{w^2}, 0\right). \quad (6.13)$$

Con toda esta información estamos en condiciones de generalizar nuestro resultado anterior:

**Proposición 6.7.1** *Sea  $f$  una función holomorfa en un abierto conexo  $U$ . Sea  $\Gamma$  una curva cerrada simple contenida en  $U$ , orientada positivamente, tal que en su exterior sólo hay un conjunto finito de singularidades aisladas  $\{z_1, \dots, z_N\}$ . La integral de  $f$  a lo largo de  $\Gamma$  se puede expresar como*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -i2\pi \text{Res}(f, \infty) - i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n). \quad (6.14)$$

La deducción es sencilla. Como el conjunto de las singularidades es finito, existe una corona  $C(0; R, \infty)$  de radio adecuado,  $R$ , que rodea a todas ellas. Tomemos una curva simple  $\Gamma_R$  contenida en  $C(0; R, \infty)$  y circunferencias  $\Gamma_n$  centradas en cada singularidad  $z_n$ , orientadas positivamente, de radio suficientemente pequeño para que estén contenidas en el dominio de holomorfía de  $f$  y no rodeen a ninguna otra singularidad. Es claro que  $\Gamma_R$  es un ciclo homólogo a  $\Gamma + \sum \Gamma_n$  módulo  $U$ . Por tanto,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz - \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} f(z) dz = -i2\pi \text{Res}(f, \infty) - i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n),$$

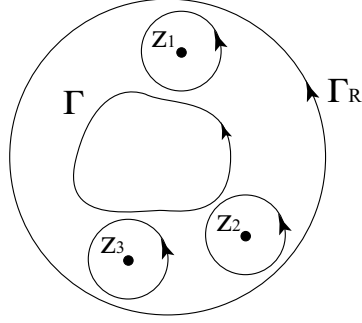


Figura 6.15: Integral por residuo en el infinito

en consonancia con la fórmula enunciada.  $\square$

O sea, que cuando calculamos una integral, podemos efectuarla usando tanto los residuos de los polos del interior, como los del exterior y el punto del infinito, siempre que las singularidades sean aisladas.

**Ejemplo 6.7.1** Integral de  $f(z) = z/(1 + z^2)$  a lo largo de la circunferencia centrada en el origen de radio 2, orientada positivamente.

Como la circunferencia rodea a los dos polos  $z = \pm i$ , podemos calcular la integral por el teorema de los residuos,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = i2\pi (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) = i2\pi \left( \frac{i}{i2} + \frac{i}{i2} \right) = i2\pi .$$

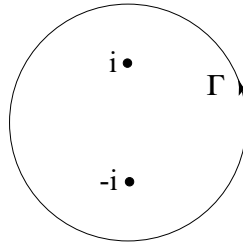


Figura 6.16: Integral de  $f(z) = z/(1 + z^2)$  a lo largo de  $\Gamma$

O bien hacer uso del residuo en el infinito,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -i2\pi \text{Res}(f, \infty) = i2\pi ,$$

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res} \left( \frac{1}{w} \frac{1}{(w^2 + 1)}, 0 \right) = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(w^2 + 1)} = -1 .$$

Obviamente, el interés del residuo en el infinito sería muy limitado si sólo sirviese para ejemplos como el anterior. Su aplicación más práctica es para el cálculo de integrales de funciones cuyo dominio de holomorfía contiene singularidades no aisladas, pero que son holomorfas en una corona de radio infinito.

**Ejemplo 6.7.2** Integral de  $f(z) = (\sqrt{z-a})_{\pi} (\sqrt{z-b})_{\pi}$ ,  $a < b$  reales,  $a$  lo largo de una circunferencia centrada en el origen de radio mayor que  $|a|, |b|$ , orientada positivamente.

La función  $f$  es holomorfa en todo el plano complejo, salvo en el segmento real  $[a, b]$ . La curva  $\Gamma$  rodea dicho segmento. Podemos calcular la integral por medio del residuo en el infinito de  $f$ .

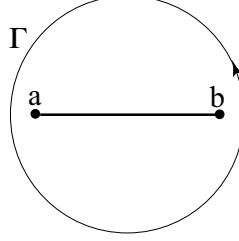


Figura 6.17: Integral de  $f(z) = (\sqrt{z-a})_{\pi} (\sqrt{z-b})_{\pi}$  a lo largo de  $\Gamma$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -i2\pi \text{Res}(f, \infty) ,$$

$$\text{Res}(f, \infty) = \text{Res} \left( -\frac{1}{w^2} \left( \sqrt{\frac{1}{w} - a} \right)_{\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{w} - b} \right)_{\pi}, 0 \right) .$$

Esta expresión es inmanejable, ya que el argumento de las raíces tiende a infinito. Como comprobaremos enseguida, podemos sustituir la expresión por esta otra, mucho más asequible,

$$\begin{aligned} \text{Res} \left( -\frac{1}{w^3} \left( \sqrt{(1-aw)(1-bw)} \right)_{\pi}, 0 \right) &= -\frac{1}{2} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{d^2}{dw^2} \left( \sqrt{(1-aw)(1-bw)} \right)_{\pi} \\ &= \frac{(a-b)^2}{8} , \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las derivadas,

$$\frac{d}{dw} \left( \sqrt{(1-aw)(1-bw)} \right)_{\pi} = \left( abw - \frac{a+b}{2} \right) \left( (1-(a+b)w + abw^2)^{-1/2} \right)_{\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dw^2} \left( \sqrt{(1-aw)(1-bw)} \right)_{\pi} &= ab \left( (1-(a+b)w + abw^2)^{-1/2} \right)_{\pi} \\ &\quad - \left( abw - \frac{a+b}{2} \right)^2 \left( (1-(a+b)w + abw^2)^{-3/2} \right)_{\pi} . \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de la integral es, finalmente,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = -i2\pi \text{Res}(f, \infty) = -i\pi \frac{(a-b)^2}{4} .$$

Nos queda pendiente demostrar que sacar la variable de la raíz supone un cambio de determinación:

**Lema 6.7.1** *En alguna corona  $C(0; R, \infty)$  de radio  $R$  suficientemente grande, las funciones  $f(z) = (\sqrt{z-a})_\pi (\sqrt{z-b})_\pi$ ,  $g(z) = z \left( \sqrt{(1-a/z)(1-b/z)} \right)_\pi$  son iguales.*

La función  $f$  es holomorfa salvo en el segmento  $[a, b]$  del eje real, como ya sabemos. Si tiene que coincidir con  $g(z)$  para valores de  $|z|$  grandes, esta función no deberá tener singularidades a grandes distancias del origen.

Los puntos singulares de  $g$  verifican que  $(1-a/z)(1-b/z)$  es un número real negativo. Si los puntos singulares no estuvieran encerrados en una bola  $B(0; R)$  de radio suficientemente grande, habría valores singulares  $z_n$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

Pero en este caso  $\lim(1-a/z_n)(1-b/z_n) = 1$ , en contradicción con el hecho de que este producto es un número negativo. Luego los puntos singulares sí están encerrados en una bola  $B(0; R)$ .

Por tanto, ambas funciones son holomorfas en una corona  $C(0; R, \infty)$  de radio  $R$  suficientemente grande.

Veamos que  $f, g$  coinciden en un conjunto de puntos no aislados, como la semirrecta real descrita por  $x > b, x > 0$ :

Como tanto  $x-a$  como  $x-b$  son positivos en esta semirrecta, sus raíces en la determinación  $\pi$  coinciden con las raíces reales ordinarias,

$$(\sqrt{x-a})_\pi (\sqrt{x-b})_\pi = \sqrt{x-a} \sqrt{x-b} = \sqrt{(x-a)(x-b)}.$$

Y lo mismo sucede con la otra función,

$$x \left( \sqrt{(1-a/x)(1-b/x)} \right)_\pi = x \sqrt{(1-a/x)(1-b/x)} = \sqrt{(x-a)(x-b)},$$

ya que  $x > a > b$ .

Por tanto ambas funciones son iguales en la corona  $C(0; R, \infty)$ , ya que son holomorfas en dicho abierto y coinciden en un conjunto de puntos no aislados.  $\square$

Este resultado permite calcular integrales de raíces en la recta real:

**Ejemplo 6.7.3** *Sea  $f$  una función holomorfa en todo el dominio complejo salvo en un conjunto finito de singularidades,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , ninguna de ellas en el intervalo real  $[a, b]$ . Entonces,*

$$I = \int_a^b f(x) \sqrt{|x-a| \cdot |x-b|} dx = \pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(g, z_n) + \pi \text{Res}(g, \infty), \quad (6.15)$$

siendo  $g(z) = f(z) (\sqrt{z-a})_\pi (\sqrt{z-b})_\pi$ .

Para comprobarlo, integramos la función  $ig(z)$ . El recinto de integración,  $\Gamma_\varepsilon$ , está formado por una semicircunferencia izquierda centrada en  $a$  y una semicircunferencia derecha centrada en  $b$ , ambas de radio  $\varepsilon$ , unidas por segmentos paralelos al  $[a, b]$ , recorrido en sentido positivo,

$$I(\varepsilon) = \int_{\Gamma_\varepsilon} ig(z) dz = 2\pi \text{Res}(g, \infty) + 2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(g, z_n),$$

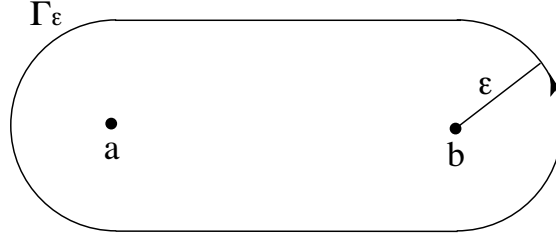


Figura 6.18: Recinto de integración  $\Gamma_\varepsilon$

cuando el radio  $\varepsilon$  es lo bastante pequeño como para que el recinto no rodee ninguna singularidad.

Cuando  $\varepsilon$  tiende a cero, el integrando en el segmento superior, recorrido en sentido negativo, tiende a  $-f(x)\sqrt{|x-a|\cdot|x-b|}$  y en el segmento inferior, recorrido en sentido positivo, a  $f(x)\sqrt{|x-a|\cdot|x-b|}$ .

Por tanto, en el límite de  $\varepsilon$  nulo,

$$2I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = 2\pi \text{Res}(g, \infty) + 2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(g, z_n) . \quad \square$$

**Ejemplo 6.7.4** Calcular la integral  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx$ .

Podemos aplicar el anterior ejemplo a este caso con  $f(z) = 1/(1+z^2)$ , que tiene polos simples en  $z = \pm i$ ,  $g(z) = (\sqrt{z-1})_\pi (\sqrt{z+1})_\pi / (1+z^2)$ . El infinito es polo simple, ya que,

$$\frac{g(w^{-1})}{w^2} = \frac{1}{w^3} \frac{(\sqrt{1-w^2})_\pi}{1+w^{-2}} = \frac{1}{w} \frac{(\sqrt{1-w^2})_\pi}{w^2+1} .$$

Calculamos los residuos,

$$\text{Res}(g, \infty) = - \lim_{w \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-w^2})_\pi}{w^2+1} = -1 ,$$

$$\text{Res}(g, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(\sqrt{z-1})_\pi (\sqrt{z+1})_\pi}{z+i} = \frac{\sqrt{2}}{i2} e^{i(3\pi/8+\pi/8)} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\text{Res}(g, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(\sqrt{z-1})_\pi (\sqrt{z+1})_\pi}{z-i} = \frac{\sqrt{2}}{-i2} e^{i(-3\pi/8-\pi/8)} = \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

y los reunimos para calcular el valor de la integral,

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} dx = \pi \text{Res}(g, \infty) + \pi \text{Res}(g, i) + \pi \text{Res}(g, -i) = \pi (\sqrt{2} - 1) .$$



## 6.8. Valores principales de integrales

En todo el tratamiento de las integrales hemos eludido el caso en el que el integrando,  $f$ , no es continuo, por ejemplo, porque el camino de integración,  $\Gamma$ , pasa por una singularidad,  $z_0$ . En general, en este caso las integrales no están bien definidas, porque no convergen. Aún así, es posible eliminar la singularidad, en el caso de polos simples, y calcular un valor de la integral que se denomina **valor principal de Cauchy**.

Tomemos una bola  $B(z_0; \varepsilon)$  en torno a cada polo  $z_0$ . La curva  $\Gamma_\varepsilon$  es el resultado de eliminar de  $\Gamma$  la parte de curva comprendida dentro de la bolas  $B(z_0; \varepsilon)$ . El valor principal de Cauchy es el límite de la integral a lo largo de  $\Gamma_\varepsilon$  cuando  $\varepsilon$  tiende a cero:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz . \quad (6.16)$$

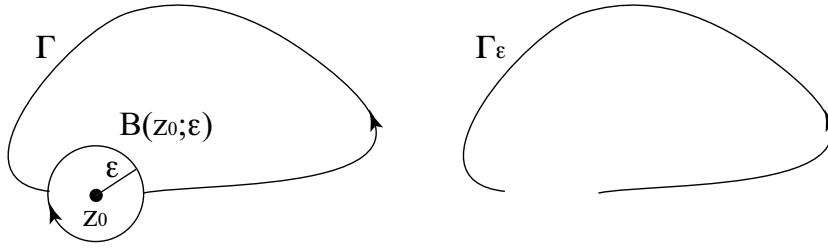


Figura 6.19: Recinto de integración  $\Gamma_\varepsilon$  para el cálculo del valor principal

Este valor principal de Cauchy de una integral impropia se puede calcular también de manera sencilla, modificando el teorema de los residuos:

**Teorema 6.8.1** *Sea  $\Gamma$  una curva cerrada simple orientada positivamente. Sean  $\{z_1, \dots, z_N\}$  las singularidades de una función holomorfa  $f$  en el interior de  $\Gamma$  y  $\{w_1, \dots, w_M\}$ , polos simples sobre  $\Gamma$  de la misma función. Entonces,*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n) + i\pi \sum_{m=1}^M \text{Res}(f, w_m) . \quad (6.17)$$

Para calcular el valor principal, cerramos  $\Gamma_\varepsilon$  con arcos de circunferencia,  $\Gamma_{m,\varepsilon}$ , de radio  $\varepsilon$  centrados en cada polo  $w_m$ , de manera que rodeen el polo, dejándolo en el exterior. La curva cerrada así constituida la denominamos  $\Gamma(\varepsilon)$ . Así pues,

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\varepsilon)} f(z) dz - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{m,\varepsilon}} f(z) dz .$$

El valor de la integral a lo largo de  $\Gamma(\varepsilon)$  se obtiene por el teorema de los residuos,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\varepsilon)} f(z) dz = i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n) .$$

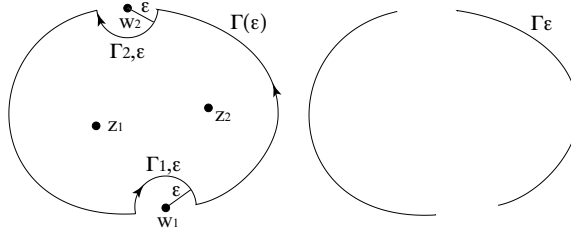


Figura 6.20: Recinto de integración  $\Gamma(\varepsilon)$  para el cálculo del valor principal

Sólo resta evaluar las integrales sobre los arcos de circunferencia,  $\Gamma_{m,\varepsilon}$ .

Cuando  $\varepsilon$  tiende a cero,  $\Gamma_{m,\varepsilon}$  tiende a una semicircunferencia. Como  $f$  es holomorfa en una corona alrededor de  $w_m$ , tiene su serie de Laurent,

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - w_m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w_m)^n ,$$

recordando que hemos impuesto que los polos sean simples.

Parametrizamos la semicircunferencia por  $\gamma(t) = w_m + \varepsilon e^{it}$ ,  $t \in [\phi_0, \phi_0 + \pi]$ , para poder calcular las integrales,

$$\int_{\Gamma_{m,\varepsilon}} f(z) dz = -i \sum_{n=-1}^{\infty} a_n \varepsilon^{n+1} \int_{\phi_0}^{\phi_0 + \pi} e^{i(n+1)t} dt = -i\pi a_{-1} + O(\varepsilon) ,$$

teniendo en cuenta que la semicircunferencia se recorre en sentido horario.

Juntando todos los valores de las integrales,

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n) + i\pi \sum_{m=1}^M \text{Res}(f, w_m) . \quad \square$$

**Ejemplo 6.8.1** Integral de  $f(z) = 1/(z - 1)$  a lo largo de la circunferencia de radio unidad centrada en el origen, orientada positivamente.

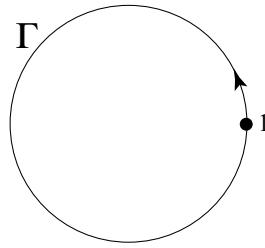


Figura 6.21: Curva  $\Gamma$  y polo de  $f(z) = 1/(z - 1)$

La función  $f$  es holomorfa salvo en  $z_0 = 1$ , punto por el que pasa la circunferencia  $\Gamma$ . Por tanto, la integral no está definida, pero su valor principal es

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - 1} = i\pi \text{Res}(f, 1) = i\pi .$$

También se pueden generalizar de manera inmediata los casos de integrales estudiados previamente.

**Ejemplo 6.8.2** Sea  $f$  una función holomorfa en  $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > -a\}$  para algún valor  $a > 0$ , salvo en un conjunto finito de polos,  $\{z_1, \dots, z_N\}$ , situados fuera del eje real y  $\{w_1, \dots, w_M\}$ , situados en el eje real. Si  $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$  en  $U$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = i2\pi \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n) + i\pi \sum_{m=1}^M \text{Res}(f, w_m) . \quad (6.18)$$

El resto de resultados se modifica de manera análoga.

**Ejemplo 6.8.3** Integral de  $\sin x/x$  a lo largo de la recta real.

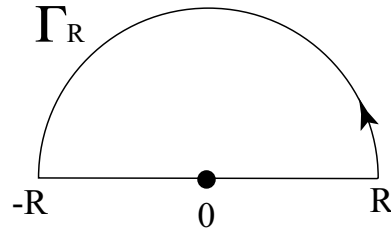


Figura 6.22: Curva  $\Gamma$  y polo de  $f(z) = e^{iz}/z$

Nuestro integrando es la parte imaginaria de  $e^{ix}/x$ , que es un caso particular de integral, que podemos evaluar por el lema de Jordan, con  $k = 1 > 0$ , teniendo en cuenta que  $f(z) = e^{iz}/z$  no tiene más polos en el semiplano superior que  $z_0 = 0$ , sobre el eje real. Por tanto, estamos calculando un valor principal,

$$I = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi \text{Res}(f, 0) = i\pi \lim_{z \rightarrow 0} e^{ikz} = i\pi ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \Im(I) = \pi .$$

En este caso la integral es convergente, ya que la singularidad en el origen es evitable.

## 6.9. Sumación de series

Finalmente, otro resultado interesante de la integración por el teorema de los residuos es que permite obtener de manera sencilla la suma de muchas series.

El resultado está basado en las propiedades de la función  $\pi \cot \pi z$ . Esta función es holomorfa salvo en los ceros de  $\sin \pi z$ , que son precisamente los números enteros,  $z = n$ . Además, estos polos son simples y los residuos valen la unidad,

$$\text{Res}(\pi \cot \pi z, n) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{(z - n)\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi \cos \pi z - \pi^2(z - n) \sin \pi z}{\pi \cos \pi z} = 1 .$$

Otra función interesante es  $\pi \operatorname{cosec} \pi z$ , que tiene los mismos ceros,  $z = n \in \mathbb{Z}$ , pero los residuos cambian de signo,

$$\operatorname{Res} (\pi \operatorname{cosec} \pi z, n) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{(z - n)\pi}{\sin \pi z} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi}{\pi \cos \pi z} = (-1)^n .$$

Si multiplicamos la función  $\pi \cot \pi z$  por una función  $f(z)$  que sólo presente un número finito de singularidades aisladas, ninguna de ellas correspondiente a un valor entero,  $\{z_1, \dots, z_M\}$ , tendremos que la integral de la función  $g(z) = \pi \cot \pi z f(z)$  a lo largo de una curva cerrada simple,  $\Gamma$ , orientada positivamente, que no pase por ninguno de los polos será

$$\int_{\Gamma} \pi \cot \pi z f(z) dz = i2\pi \left\{ \sum_{n \in \operatorname{int} \Gamma} f(n) + \sum_{z_M \in \operatorname{int} \Gamma} \operatorname{Res} (g, z_m) \right\} ,$$

donde la suma se extiende a los polos contenidos en el interior de  $\Gamma$ .

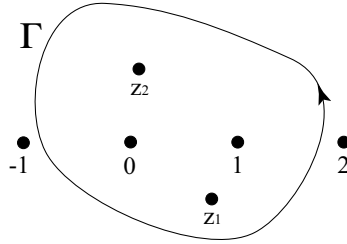


Figura 6.23: Polos de  $\pi \cot \pi z f(z)$

Tal como se muestra en la fórmula, como los polos  $n \in \mathbb{Z}$  son simples y no coinciden con los polos de  $f$ ,

$$\operatorname{Res} (g, n) = \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \pi \cot \pi z f(z) = f(n) .$$

Si además los polos de  $f$  fueran simples, algo que no es necesario para nuestro razonamiento,

$$\operatorname{Res} (g, z_m) = \lim_{z \rightarrow z_m} (z - z_m) \pi \cot \pi z f(z) = \pi \cot \pi z_m \operatorname{Res} (f, z_m) .$$

Por tanto, si la integral a lo largo de  $\Gamma$  tiende a cero cuando la curva abarque en su interior todo el dominio complejo, tendremos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{m=1}^M \operatorname{Res} (\pi \cot \pi z f(z), z_m) .$$

Y, del mismo modo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_{m=1}^M \operatorname{Res} (\pi \operatorname{cosec} \pi z f(z), z_m) .$$

Así pues, todo se reduce a imponer condiciones suficientes para que la integral sobre  $\Gamma$  se anule:

**Proposición 6.9.1** Sea  $f$  una función holomorfa salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas en valores no enteros,  $\{z_1, \dots, z_M\}$ , y que verifica  $|zf(z)| \leq M$  para  $|z| \geq R$ , con  $M, R > 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= - \sum_{m=1}^M \text{Res} (\pi \cot \pi z f(z), z_m) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) &= - \sum_{m=1}^M \text{Res} (\pi \operatorname{cosec} \pi z f(z), z_m) . \end{aligned}$$

Tal como queda dicho, se reduce la demostración a comprobar que la integral de  $f(z)\pi \cot \pi z$  tiende a cero.

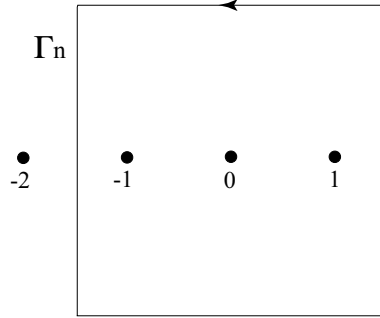


Figura 6.24: Recinto de integración  $\Gamma_n$

Consideremos el cuadrado  $\Gamma_n$  con vértices en  $\pm(n+1/2)(1 \pm i)$ , que engloba los polos desde  $-n$  a  $n$ . La siguiente integral,

$$\int_{\Gamma_n} \frac{\pi \cot \pi z}{z} dz ,$$

es nula, ya que los residuos se cancelan entre sí,

$$\text{Res} (\pi \cot \pi z / z, 0) = 0 , \quad \text{Res} (\pi \cot \pi z / z, -n) = -\text{Res} (\pi \cot \pi z / z, n) ,$$

por ser par la función.

Por otra parte, como  $|zf(z)|$  está acotada para valores grandes de  $|z|$ , tenemos que

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{z} + O(z^{-2}) ,$$

porque si tuviera términos  $b_0 + b_1 z + O(z^2)$ , no estaría acotada.

Por tanto, podemos acotar la integral,

$$\left| \int_{\Gamma_n} \pi \cot \pi z f(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma_n} \pi \cot \pi z \left( f(z) - \frac{b_{-1}}{z} \right) dz \right| ,$$

teniendo en cuenta que, como  $\pi \cot \pi z$  no tiene ningún polo en  $\Gamma_n$ , es continua sobre el circuito y estará acotada en módulo por una constante  $M_1$ . Además, de la serie de Laurent de  $f$  sabemos que  $|f(z) - b_{-1}z^{-1}| \leq M_2 z^{-2}$ . Y como la longitud del cuadrado es  $4(2n+1)$ ,

$$\left| \int_{\Gamma_n} \pi \cot \pi z f(z) dz \right| \leq L(\Gamma_n) \sup_{z \in \Gamma_n} \left| \pi \cot \pi z \left( f(z) - \frac{b_{-1}}{z} \right) \right| \leq \frac{4(2n+1)M_1M_2}{(n+1/2)^2},$$

teniendo en cuenta que el valor mínimo que toma  $|z|$  en el cuadrado es  $n+1/2$ .

Como esta cota tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, la integral tiende a cero.  $\square$

**Ejemplo 6.9.1** *Suma de las series*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}, a > 0$ .

Podemos usar la función  $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$ , con polos simples en  $z = \pm ia$  y residuos  $\text{Res}(f, \pm ia) = \pm 1/i2a$ , ya que  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ .

Por tanto,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \cot(\pi ia) \text{Res}(f, ia) - \pi \cot(-\pi ia) \text{Res}(f, -ia) = \frac{\pi}{a} \coth \pi a,$$

Y como  $f$  es una función par,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = f(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2}.$$

Del mismo modo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = \frac{\pi}{a} \text{cosec } \pi a \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n) = \frac{\pi}{2a} \text{cosec } \pi a - \frac{1}{2a^2}.$$