Guía 4 : Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

23 de Junio de 2008

P1. Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones :

a) $f(z) = \overline{z}$.

b) $f(z) = e^x(\cos y - i\sin y)$, $(z = x + iy)$.

c) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i\sin y)$, $(z = x + iy)$

d) $f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos y + i\sin y)$, $(z = x + iy)$.

P2. Sea S la región del plano complejo $\mathbb{C}$ definido por las condiciones

$$1 \leq |z| \leq 2 \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

Hallar el área de la región obtenida mediante la transformación $z \to \omega = z^2$.

P3. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función Holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante.

Funciones armónicas

Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el Laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

Si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω.

P4. Sea $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe que;

a) Si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω.

b) $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.

c) Si $f \in H(\Omega)$ entonces $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

d) Si f y f^2 son armónicas entonces f o $\overline{f}$ es holomorfa.

P5. Pruebe que:

a) $\sin(iz) = i\sinh(z)$.

b) $\sinh(iz) = i\sin(z)$.

c) $\cos(iz) = \cosh(z)$.

d) $\cosh(iz) = \cos(z)$

e) $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$.

f) $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.

g) $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.

h) $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}\sin(x + iy) = \frac{1}{2}[\sin x + i\cos x]$.

P6. Demuestre que $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

P7. Sea $L \subset \mathbb{C}$ una recta horizontal, y $V \subset \mathbb{C}$ una recta vertical. Demuestre que:

a) El conjunto $\{\sin(z) | z \in L\} \subset \mathbb{C}$ es una elipse.

b) El conjunto $\{\sin(z) | z \in V\} \subset \mathbb{C}$ es una hipérbola.
Es decir, el seno mapea rectas horizontales en elipses y rectas verticales en hipérbolas.