Clase Auxiliar N°11: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

20 de Junio de 2008

P1. Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}.$$

(a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y verifique que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ sobre dicho dominio.

(b) Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera. Nota: Puede usar el teorema de la divergencia utilizando un volumen adecuado. En tal caso tenga especial cuidado en verificar las hipótesis del teorema.

(c) Interprete el resultado obtenido en (b).

P2. *a)* Determinar el Laplaciano $\Delta\phi$ en coordenadas esféricas.

b) Hallar las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$ en que el campo escalar ϕ sólo depende de la distancia r.

P3. Calcule el gradiente de

$$f(x,y,z) = \frac{\arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2}$$

P4. Sea $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.

P5. Describir el conjunto $\{z \in \mathbb{C} \colon |1 + z^2| = 1\}$.

P6. Sea S la región del plano complejo $\mathbb{C}$ definido por las condiciones

$$1 \le |z| \le 2 \quad -\tfrac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \tfrac{\pi}{2}$$

Hallar el área de la región obtenida mediante la transformación $z \to \omega = z^2$.

P7. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función Holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante.

P8. Estudie la diferenciabilidad de la función $f(z) = |z|^2$.

Funciones armónicas

Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el Laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

Si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω.

P9. Sea $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe que;

a) Si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω.

b) $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.

c) Si $f \in H(\Omega)$ entonces $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.

d) Si f y f^2 son armónicas entonces f o $\overline{f}$ es holomorfa.