Guía 3 : Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

15 de Junio de 2008

P1. Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido en coordenadas esféricas por $f(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\varphi} + r^2\sin\theta\hat{\theta}$. Aplicando el teorema de Gauss calcular el flujo del campo vectorial $\vec{f}$ a través de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

P2. Verifique el teorema de Stokes si $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el campo vectorial $f(x,y,z) = (z^2+1)\hat{\imath} + 2z\hat{\jmath} + (2xz+2y)\hat{k}$ y Σ es la porción de superficie de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ situada en el primer octante.

P3. Probar que el flujo del campo vectorial $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (ax,by,cz)$, donde $a,b,c>0$, a través de la esfera con centro en el origen y radio $R>0$, orientada positivamente, es igual a $(a+b+c)\frac{4\pi R^3}{3}$.

P4. Verifique que el campo vectorial $f\colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x,y,z) = \frac{e^x}{x^2+y^2}\left(x\sin y - y\cos y, x\cos y + y\sin y, 0\right)$$

es irrotacional pero no conservativo.

P5. Hallar la función $r \to f(r)$, donde $r = \|\vec{r}\|$ que satisface la siguiente ecuación $\operatorname{div}(\nabla f(r)) = 0$.

P6. Verificar la siguiente formula

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)dV = \iint_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot d\vec{\Sigma}$$

Si los campos escalares $f,g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ están definidos por $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ y $g(x,y,z) = xyz$ y Ω es la región acotada por la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2=1$.

P7. Sea Γ la curva definida por la intersección de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ y el cono de ecuación $z^2 = x^2+y^2$, $z\geq 0$. Calcular $\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ si $\vec{F}$ es el campo vectorial definido por;

a) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+z, y^2+x, z^2+y)$.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,z)$. **Solución:** -4π

P8. El empuje total que ejerce el agua sobre un objeto de superficie S está dado por

$$G = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

con

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{cases} (0,0,\rho g(h-z)) & \text{si } z\leq h \\ (0,0,0) & \text{si } z>h \end{cases}$$

donde g es el módulo de la aceleración de gravedad, ρ es la densidad del agua y h es la altura del nivel del agua. Demuestre que G es igual al peso del volumen de agua desplazado por el objeto.

P9. Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Consideremos el campo definido por $\vec{F}(x,y,z) = (z\operatorname{sen}(x) - y^3, z\cos(y) + x^3, \cos(xy))$. Calcule $I = \iint_S \nabla\times\vec{F}d\vec{S}$.

P10. (a) Dado un campo vectorial $\vec{F}\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un abierto, pruebe que $\operatorname{div}(\nabla\times\vec{F}) = 0$.

(b) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (e^z - x^2y)\widehat{\imath} + (z+xy^2)\widehat{\jmath} + y^2\sqrt{1+z^4}\widehat{k}$. Calcule $\nabla\times\vec{F}$.

(c) Sea S la superficie del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que se encuentra en la región $z \geq 1$ y que se orienta según la normal superior (exterior a la esfera). Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de S donde $\vec{F}$ es el campo vectorial de la parte (b).

P11. Considere el volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones:

$$\begin{cases} |z| \leq 2 - x^2 - y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la región Ω.

(b) Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\vec{F} = \rho\hat{\rho}$ (en coordenadas cilíndricas) a través de $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior.

(c) Calcular el trabajo del campo $\vec{F} = \rho\widehat{\rho}$ a lo largo de la curva que se obtiene al intersectar las superficies $z = 2 - x^2 - y^2$ con $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (precisar la orientación escogida para la curva).

P12. Supongamos que un fluido está sometido a un campo de velocidades dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (x - yz)\widehat{\imath} + (y + xz)\widehat{\jmath} + (z + 2xy)\widehat{k}$$

Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sea S_2 la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Sea Ω el volumen limitado por S_1 y S_2.

(a) Calcule $\displaystyle\int\int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dA$ con $\vec{n}$ la normal interior al cilindro. Interprete el resultado.

(b) Utilizando el teorema de la divergencia, calcule el flujo neto que pasa a través de las paredes de la región Ω.

(c) Calcule directamente el flujo a través de S_2 orientada según la normal exterior a la esfera. Compare con lo obtenido en (a) y (b). En cada caso interprete los resultados y explicite: el sistema de coordenadas y el correspondiente vector posición que utiliza, la parametrización, el campo de normales y los elementos de superficie o volumen según corresponda.

P13. Considere el campo $\vec{F} = r^3\widehat{r} + \exp(\varphi\cosh(r))\widehat{\varphi}$ (coordenadas esféricas).

(a) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

(b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq h$ (sin tapa).

P14. Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho^2}\widehat{\rho} + e^{-\rho^2}\widehat{\theta} + z\widehat{k}$ (en coordenadas cilíndricas) y S el casquete esférico de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(a) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la porción de S que se encuentra en la región $x^2 + y^2 \geq 1$ (orientar S según la normal exterior).

(b) Calcule $\text{rot}(\vec{F})$ y el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la curva obtenida al intersectar S con la superficie de ecuación $x = y^2 + z^2$ (escoja una orientación para la curva, indicándola mediante un bosquejo).

P15. En lo que sigue denotamos $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \neq 0\}$.

(a) Sea $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\widehat{\rho} + \rho\widehat{k}$ (coordenadas cilíndricas). Sea S la porción del casquete esférico $x^2+y^2+z^2 = a^2$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2+y^2 \leq a^2/4$. Bosqueje S y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según la normal exterior al cubo.

(b) Sea $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \cos(\varphi)\,\hat{\theta}$ (coordenadas esféricas). Utilice el Teorema de Stokes para calcular el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la curva que resulta de intersectar el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con el plano $x = 1$. Haga un bosquejo indicando la orientación de la curva y de la normal escogida.