Clase Auxiliar N°10: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

13 de Junio de 2008

P1. Sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(zx + \operatorname{sen}(x-y), y - \operatorname{sen}(x-y), \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2}z^2 - 2z\cos(x-y) \right).$$

Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete semi-esférico (sin tapa) dado por $x^2+y^2+z^2=1$ con $z>0$. Precise el sentido de orientación escogido para los cálculos.

P2. Calcule la integral de trabajo $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial $\vec{F} = (x^2-yz, y^2-xz, z^2-xy)$ sobre la hélice Γ que une los puntos $P=(1,0,0)$ y $Q=(1,0,1)$ dando una sola vuelta.

P3. Dados $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, pruebe que $\operatorname{div}(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g\operatorname{div}\vec{F}$. Muestre que para todo $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega')$ con $\Omega' \supseteq \Omega \cup \partial\Omega$ se tiene la identidad de Green:

$$\iiint\limits_{\Omega} (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint\limits_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot d\vec{S},$$

donde $\partial\Omega$ está orientado según la normal exterior.

P4. Sea $a \in \mathbb{R}^3$ y S una superficie. Pruebe que

$$\int\limits_{\partial S} (a \times \vec{r}) d\vec{r} = 2 \iint\limits_{S} a \cdot d\vec{S}$$

P5. Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = x^2+y^2$ con el casquete esférico unitario, recorrida en sentido antihorario. Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ en su dominio y que $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el teorema de Stokes.