Pauta Control 2: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

29 de Mayo de 2008

P1. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $xyz = 1$ que sea paralelo al plano $x + y + z - 3 = 0$.
Solución.
Sea Σ a la superficie $xyz = 1$ y Π el plano tangente a Σ en (x_0, y_0, z_0).

a) Cálculo de Π.
Sea $\phi = xyz - 1$, luego $\nabla\phi|_{(x_0,y_0,z_0)} = (y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)^t$, por lo tanto

$$\hat{n}_1 = \frac{(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)^t}{\sqrt{y_0^2z_0^2 + x_0^2z_0^2 + x_0^2y_0^2}}$$

y así la ecuación de Π es;

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0z_0 \\ x_0z_0 \\ x_0y_0 \end{pmatrix} = 0$$

Pero queremos que Π sea paralelo a la superficie $x + y + z - 3 = 0$, y esto sucede cuando la normal $\hat{n}_2$ a $x + y + z - 3 = 0$ tiene la misma dirección que $\hat{n}_1$.

b) Cálculo de $\hat{n}_2$;
Sea $\phi = x + y + z - 3$, luego $\nabla\phi = (1, 1, 1)^t$, por lo tanto $\hat{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^t$.

c) Dado que sólo nos interesa que Π sea paralelo en $x+y+z-3 = 0$, basta con encontrar $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ tal que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0z_0 \\ x_0z_0 \\ x_0y_0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda \neq 0$. Resolviendo el sistema se encuentra que $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\lambda}$, pero $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, luego $x_0y_0z_0 = 1$, lo que nos dice que $\lambda = 1$ y así $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Finalmente la ecuación para Π es

$$\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

que corresponde a $x + y + z - 3 = 0$.

P2. Evaluar utilizando el teorema de Green la integral de línea

$$\oint_\Gamma (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$$

Si Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = Rx$, donde $R > 0$.
Solución.

Primero notamos que $x^2+y^2=Rx$, se puede escribir como $(x-\frac{R}{2})^2+y^2=\frac{R^2}{4}$, que representa una circunferencia de radio $\frac{R}{2}$ y centro $(\frac{R}{2},0)$. Sea $\vec{f}=(xy+x+y,xy+x-y)$, claramente $\vec{f}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ sobre cualquier conjunto abierto, simplemente conexo que contiene a Γ, la cual es simple y seccionalmente regular. Sea A la región formada por Γ y su interior. Por el teorema de Green;

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy &= \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy+x-y)-\frac{\partial}{\partial y}(xy+x+y)\right]dxdy \\
&= \iint_A \left[(y+1)-(x+1)\right]dxdy \\
&= \int_0^R \int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} (y-x)dydx \\
&= \int_0^{R/2} (r\sin\theta-(\frac{R}{2}+r\cos\theta))rd\theta dr \\
&= -\pi R\int_0^{R/2} rdr \\
&= \frac{-\pi R^3}{8}
\end{aligned}$$

donde se usó el cambio de variables $x=\frac{R}{2}+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, cuyo Jacobiano es $|J|=r$.

P3. Hallar la porción de superficie definida explícitamente por $2z=x^2+y^2$ que es cortada por el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$.

Solución.

a) Primera forma.
Sea Σ la superficie pedida y denotemos por $A(\Sigma)$ su área. La superficie Σ está descrita por $2z=x^2+y^2$, $x^2+y^2\le 1$, parametrizamos usando coordenadas cilíndricas $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$, así

$$\vec{r}(x,y,z)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\tfrac{\rho^2}{2})\quad \rho\in[0,1]\quad \theta\in[0,2\pi]$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} &= (\cos\theta,\sin\theta,\rho)=\hat{\rho}+\rho\hat{k} \\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} &= (-\rho\sin\theta,\rho\cos\theta,0)=\rho\hat{\theta}
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=(\hat{\rho}+\rho\hat{k})\times\rho\hat{\theta}=\rho\hat{k}-\rho^2\hat{\rho}$$

y así

$$d\Sigma=\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\|d\rho d\theta=\sqrt{\rho^2+\rho^4}d\rho d\theta$$

por lo tanto

$$A(\Sigma)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{\rho^2+\rho^4}d\rho d\theta=2\pi\int_0^1\rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho=\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$$

b) Segunda forma.

Parametrizamos la superficie de la forma;

$$\vec{r}(x, y, z) = (x, y, \tfrac{x^2+y^2}{2}), \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

y usamos que $d\Sigma = \sqrt{EG - F^2}dydx$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = y$$

luego

$$E = 1 + x^2, \quad G = 1 + y^2, \quad F = xy \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

por lo tanto

$$A(\Sigma) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}dydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1} \sqrt{1 + \rho^2}\rho d\rho d\theta = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$$

donde se usó el cambio de variables $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, cuyo Jacobiano es $|J| = \rho$.

P4. Hallar la masa de fluido que fluye por unidad de tiempo en un fluido con densidad de flujo

$$\vec{f} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definida por

$$\vec{f}(x, y, z) = (y^2, x^2, 0)$$

a través de la porción de la superficie plana de ecuación $x + y + z = 1$, situada en el primer octante.

Solución.

Sea Σ la superficie plana de ecuación $x + y + z = 1$ situada en el primer octante. Debemos calcular

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} \vec{f} \cdot \hat{n} d\Sigma$$

a) Primera forma:

1) Cálculo de la normal.

Sea $\phi = x + y + z - 1$, entonces $\nabla\phi = (1, 1, 1)^t$, luego $\|\nabla\phi\| = \sqrt{3}$, y por lo tanto

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^t$$

2) Cálculo de $d\Sigma$.
Parametrizamos la superficie como:

$$\vec{r}(x,y,z) = (x, y, 1-x-y) \quad x \in [0,1], y \in [0, 1-x]$$

y usamos que $d\Sigma = \sqrt{EG - F^2}dydx$;

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

luego

$$E = 2, \quad G = 2, \quad F = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y^2 + x^2) dydx = \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^3}{3} + x^2(1-x) \right) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3) Segunda forma: Parametrizamos la superficie:

$$\vec{r}(x,y,z) = (x, y, 1-x-y) \quad x \in [0,1], y \in [0, 1-x]$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, -1)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

entonces

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$$

y así

$$\Phi = \int_0^1 \int_0^{1-x} \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dydx = \frac{1}{6}.$$