

# Guía Control 2: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer

Auxiliar: Emilio Vilches

20 de Mayo de 2008

**P1.** Evaluar aplicando el teorema de Green la integral de línea:

$$\int_{\Gamma} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

Si  $\Gamma$  es el arco de parábola  $y = x^2 - 1$ ,  $-1 \leq x \leq 2$ , seguido del segmento que une los puntos  $(2, 3)$  y  $(-1, 0)$ .

**Indicación:** Considere la región interior a  $\Gamma$  y exterior a un pequeño círculo de radio  $\rho$  centrado en el origen.

**P2.** Probar que

$$\oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

sobre cualquier curva  $\Gamma$  simple, seccionalmente regular de Jordan que contiene al origen.

**P3.** Sean  $f: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dos campos escalares de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre el conjunto abierto y conexo  $S$ . Probar que

$$\oint_{\Gamma} f \nabla g \cdot d\vec{r} = - \oint_{\Gamma} g \nabla f \cdot d\vec{r}$$

para toda curva  $\Gamma$  de Jordan seccionalmente regular contenida en  $S$ .

**P4.** Sean  $f$  y  $g$  campos escalares de clase  $\mathcal{C}^2$  sobre un conjunto abierto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Sea  $R$  una región contenida en  $A$  cuya frontera  $\Gamma$  es una curva de Jordan, simple y seccionalmente regular. Probar las siguientes identidades

a)

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g dx dy$$

b)

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy$$

c)

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} ds - g \frac{\partial f}{\partial n} ds = \iint_R (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy$$

d) Suponga ahora que  $f$  y  $g$  son armónicas sobre  $R$ , es decir  $\nabla^2 g = \nabla^2 f = 0$  sobre  $R$ , Probar que

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial n} ds$$

**P5.** Sea  $\Sigma$  la superficie definida por  $z = x\phi(\frac{y}{x})$ , donde  $\phi$  es una función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie  $\Sigma$  pasan por el origen de los ejes de coordenadas.

**Indicación:** Encontrar una parametrización de  $\Sigma$ . Calcular el plano tangente a partir de la normal.

**P6.** Hallar el ángulo que forman las curvas  $x = x_0$  e  $y = y_0$  sobre la superficie  $\Sigma$  representada por  $z = axy$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ .

**P7.** Probar que los planos tangentes a la superficie de ecuación  $xyz = a^3$  forman con los planos de coordenadas un tetraedro de volumen constante.

**P8.** Considere el campo vectorial  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $f(x, y, z) = (-y, x, 0)$ . Probar que en cada punto  $P(x, y, z)$  distinto del origen de coordenadas, el vector  $f(P)$  se encuentra en el plano tangente a la esfera con centro en el origen que pasa por  $P$ . Dé otro ejemplo de otro campo vectorial  $\vec{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con la misma propiedad.

**P9.** Sea  $\Sigma$  la superficie simple y regular descrita por la ecuación vectorial  $\vec{r} = g(r, \theta) = (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$  donde  $0 < r < 1$  y  $0 < \theta < 2\pi$ . Se pide

- Trazar y describir la superficie.
- Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie  $\Sigma$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- Hallar el elemento de área de  $\Sigma$ .

**P10.** La curva  $\Gamma$  representada por las ecuaciones paramétricas  $x = t, y = t^2, z = 2t^3, \forall t \in \mathbb{R}^3$ , tiene un punto en común con la superficie  $\Sigma$  definida por la ecuación  $z = x^2 + 3y^2 - 2xy$ . Encontrar el ángulo entre la curva  $\Gamma$  y la normal a la superficie  $\Sigma$  en este punto.

**P11.** Sea  $\Sigma$  la superficie regular descrita por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= u + \cos(v) \\ y &= u - \sin(v) \\ z &= \lambda u\end{aligned}$$

- Hallar el ángulo en  $\Sigma$  comprendido entre las curvas  $u = 1$  y  $v = \frac{\pi}{2}$ .
- Hallar la ecuación del plano tangente a  $\Sigma$  en el punto de intersección de las curvas  $u = 1$  y  $v = \frac{\pi}{2}$ .

**P12.** Calcular la masa total de una superficie en forma de cilindro circular recto de radio  $R$  y altura  $H$  (sin tapas). Si la densidad de masa  $\delta$  en cada punto de él es numéricamente igual a la distancia del punto a la base del cilindro.

**P13.** Hallar el área del manto del cilindro definido por la ecuación  $x^2 + y^2 - rx = 0$  que queda acotado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

**P14.** Calcular  $\int_{\Sigma} xy d\Sigma$ , donde  $\Sigma$  es la superficie del tetraedro con lados  $z = 0, y = 0, x + z = 1$  y  $x = y$ .

**P15.** Hallar el flujo del campo vectorial

$$f: (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow f(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} - z\hat{k} \in \mathbb{R}^3$$

a través de la parte del plano de ecuación  $x + 2y + z = 8$  que está en el primer octante.

**P16.** Hallar el flujo del campo vectorial  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$f(x, y, z) = (y^2, 0, z)$$

a través de la superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2, z \in [0, 2]\}$ . Considere la normal exterior.

**P17.** Demostrar que si  $\vec{f}$  es un campo constante, el flujo a través de la esfera de radio  $R$  centrado en el origen es nulo.