Tarea 1: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

13 de Mayo de 2008

P1. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ, descrita por el vector posición

$$\vec{R}(t) = t\vec{A} + t^2\vec{B} + 2(\tfrac{2}{3}t)^{3/2}(\vec{A} \times \vec{B}) \quad t \in [0,1]$$

donde $\vec{A}, \vec{B}$ son vectores unitarios fijos que forman entre si un ángulo α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

(a) Calcular la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$.

(b) Calcular el largo L de Γ.

(c) Hallar el tiempo que se demora la partícula en recorrer D unidades de longitud de arco a partir de la posición inicial $\vec{R}(0) = 0$.

(d) Calcular los vectores $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ en función del parámetro t.

(e) Calcular el valor de la curvatura κ y de la torsión τ.

P2. Considere la curva Γ parametrizada (en coordenadas cilíndricas) por

$$\vec{r}(\theta) = e^{|\theta|}\widehat{\rho} + 2\widehat{k}, \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$$

(a) Bosqueje la curva.

(b) Calcule la curvatura y la torsión (distinga los casos $\theta > 0$ y $\theta < 0$. ¿Qué ocurre en $\theta = 0$?).

(c) Calcule el centro de masa de Γ suponiendo una densidad constante ρ_0.

P3. Sea $\vec{\sigma} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva simple y regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Suponga que $\forall s \in [0, L]$, $\tau(s) \neq 0$ y $\kappa'(s) \neq 0$, donde $\tau(s)$ es la torsión y $\kappa'(s)$ es la derivada con respecto a s de la curvatura $\kappa(s)$ en el punto $\vec{\sigma}(s)$.

(a) Pruebe que si Γ pertenece a una esfera (i.e. existen $a > 0$ y $\vec{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\vec{\sigma}(s) - \vec{p}_0\| = a$) entonces

$$\rho(s)^2 + (\rho'(s)/\tau(s))^2 \equiv \text{ constante,} \tag{1}$$

donde $\rho(s)$ es el radio de curvatura en el punto $\vec{\sigma}(s)$.

(b) Demuestre la recíproca: si $\vec{\sigma}(s)$ satisface (1) entonces Γ pertenece a una esfera. Ind.: pruebe que si se tiene (1) entonces la función $\vec{p}(s) := \vec{\sigma}(s) + \rho(s)N(s) + \rho'(s)/\tau(s)B(s)$ es constante (con $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ los vectores tangente, normal y binormal respectivamente).

P4. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2}\ ,\ h > 0$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= z \\ z(0) &= h \end{aligned}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

(a) Bosqueje la curva y demuestre que $\tau/\kappa = h\sqrt{2}$, donde τ y κ corresponden a la torsión y curvatura de Γ, respectivamente.

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F}\,(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2}\right)$. Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3},\right]$. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0.

P5. Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña.

(a) Utilizando coordenadas cilíndricas, deducir una parametrización de Γ sabiendo que se satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$ con $a > 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.

(b) Sea $\vec{G}(x,y,z) = (y^2/2, y(x+z), y^2/2)$. Encuentre un potencial de $\vec{G}$ y calcule el trabajo de $\vec{G}$ a lo largo de Γ.

(c) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (y^2/2, y(x+z), -y^2/2)$. Calcular el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de Γ.