Pauta Pendientes Auxiliar 8 - Matemáticas Aplicadas

16 de Mayo 2008

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliares: Matías Godoy
Emilio Vilches

Pregunta 2.

Sea la superficie definida por $z = 4 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, se pide lo siguiente:

(1) Grafique la superficie dada

(2) Determine el Centro de Gravedad de la superficie, para ello recuerde que:

$$x_G = \frac{1}{M} \int\int_S x\sigma dA$$

y análogamente se definen y_G y z_G, con σ densidad superficial

Hint: Dado que σ es la densidad superficial, se cumple: $M = \int\int_S \sigma dA$

Solución:

Realizaremos solo la parte pendiente, habíamos determinado lo siguiente:

$x_G = y_G = 0$ por simetría, y en z_G llegamos a la siguiente expresión:

$$z_G = \frac{6}{\pi(17^{\frac{3}{2}} - 1)} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho d\theta$$

Procedamos a finalizar este cálculo:

Como la expresión no depende de θ, podemos evaluar directamente esa parte de la integral doble, luego:

$$z_G = \frac{6 \cdot 2\pi}{\pi(17^{\frac{3}{2}} - 1)} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \frac{12}{17^{\frac{3}{2}} - 1} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{12}{17^{\frac{3}{2}} - 1}[4 \cdot \int_0^2 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho - \int_0^2 \rho^3\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho] = 4 - \frac{12}{17^{\frac{3}{2}} - 1} \cdot \int_0^2 \rho^3\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho$$

Sea $I(\rho) = \int_0^2 \rho^3\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho$, luego $z_G = 4 - \frac{12}{17^{\frac{3}{2}} - 1} \cdot I(\rho)$, calculemos $I(\rho)$:

$$I(\rho) = \int_0^2 \rho^3\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho$$

utilicemos integración por partes, tomando $u = \rho^2$ luego $du = 2\rho d\rho$, y $dv = \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho$ por lo tanto $v = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}$ (es la misma integración que realizamos anteriormente en la auxiliar), luego:

$$I(\rho) = (u \cdot v)\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} - \int_{\rho=0}^{\rho=2} v \cdot du(\rho) = (\rho^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}})\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2\rho d\rho$$

$$= \frac{17^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{6}\int_0^2 \rho(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho$$

El cálculo de esta última integral es análogo al realizado para M, observando que solo cambia la potencia de la raíz. Es decir, en este caso:

$$\frac{d}{d\rho}(\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot(1+4\rho^2)^{\frac{5}{2}}) = \rho(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}$$

Luego, tenemos que:

$$I(\rho) = \frac{17^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{d}{d\rho}(\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot(1+4\rho^2)^{\frac{5}{2}})d\rho = \frac{17^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot(1+4\rho^2)^{\frac{5}{2}})\Big|_0^2$$

Lo que, reemplanzando en: $z_G = 4 - \frac{12}{17^{\frac{3}{2}}-1}\cdot I(\rho)$ y evaluando nos entrega finalmente que:

$$z_G \approxeq 1.665264$$

Pregunta 5.

Se define el campo eléctrico generado por una carga Q como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^2}\hat{r}$$

con ε_0 constante conocida.

Se pide determinar el flujo Φ del campo eléctrico $\vec{E}$ generado por una carga Q ubicada en el orígen, a través del manto del cilíndro infinito definido la ecuación: $x^2+y^2=a^2$ con $a>0$ considerando la normal exterior.

Solución:

En primer lugar observemos que podemos reescribir la expresión del campo eléctrico a una forma más conveniente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^3}\vec{r}$$

Pues $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$

Queremos $\Phi = \int\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ con S el manto del cilindro infinito definido por $x^2+y^2=a^2$, para esto, en primer lugar, debemos parametrizar la superficie:

Evidentemente debemos usar coordenadas cilíndricas, sea $\vec{r}(\rho,\theta,z) = \rho\hat{\rho}(\theta)+z\hat{k}$ como S es el manto de un cilíndro, se cumple $\rho = a$, luego, la parametrización es:

$\vec{r}(\theta,z) = a\hat{\rho}(\theta)+z\hat{k}$ con $\theta\in[0,2\pi)$ y $z\in(-\infty,\infty)$ pues el cilíndro es infinito.

Sabemos que $d\vec{S} = \hat{n}\cdot dA$, en este caso, se nos pide utilizar la normal exterior, luego: $\hat{n} = \hat{\rho}$ además es claro que $dA = \|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\| = ad\theta d\rho$ y $\|\vec{r}\| = \sqrt{a^2+z^2}$

Entonces:

$$\Phi = \int\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \int\int_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{\rho}ad\theta d\rho = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a\hat{\rho}+z\hat{k}}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\hat{\rho}ad\theta dz$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta dz \quad \text{Pues se tiene } \hat{k}\cdot\hat{\rho} = 0$$

$$= \frac{Q \cdot 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{a^3(1+\frac{z^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{Q}{2\varepsilon_0 a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\frac{z^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}} dz$$

Realicemos el cambio de variable $u = \frac{z}{a}$, $dz = adu$, luego:

$$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0 a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$$

Ahora realizamos un nuevo cambio de variable, sea $u = \sinh t$, luego: $du = \cosh t dt$, además sabemos que: $1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$ entonces:

$$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\sinh^2 t)^{\frac{3}{2}}} \cosh t dt = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^3 t} \cosh t dt = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 t} dt$$

Finalmente, como $\int \frac{1}{\cosh^2 t} dt = \int sech^2 t dt = \tanh t$

$$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \tanh t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}(1-(-1)) = \frac{Q \cdot 2}{2\varepsilon_0}$$

Pues $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$
En definitiva:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$