Clase Auxiliar N°7: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

9 de Mayo de 2008

Definición: Sea Σ una superficie simple y regular, y $\vec{r}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Definimos el elemento de área de Σ mediante:

$$d\Sigma = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Así el área de Σ estará dada por la expresión:

$$A(\Sigma) = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| dudv.$$

Otras expresiones para el elemento de área.

- Si $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, entonces

$$d\Sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv$$

  Además usando la indentidad de Lagrange se obtiene;

$$E = \|\tfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|^2 = \left(\tfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad G = \|\tfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|^2 = \left(\tfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$
$$F = \tfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \tfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{\partial x}{\partial v} + \tfrac{\partial y}{\partial u}\tfrac{\partial y}{\partial v} + \tfrac{\partial z}{\partial u}\tfrac{\partial z}{\partial v}$$

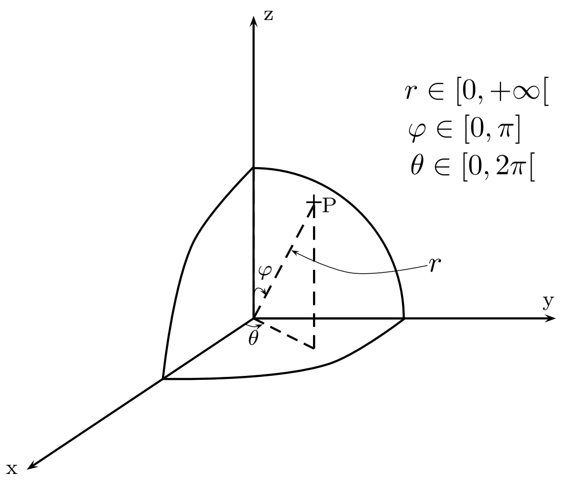
  entonces

$$d\Sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

P1. *Ventana de Viviani.*
Hallar el área del manto del cilindro definido por la ecuación $x^2 + y^2 - rx = 0$ que queda acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

P2. *Coordenadas esféricas*

Un tipo de geometría que aparece con frecuencia en las aplicaciones es la geometría esférica. Para el sistema de coordenadas ligado a esta geometría, la posición de un punto $\vec{P}$ está determinada por un radio r y dos ángulos θ y φ, como se muestra en la figura.



Así, tenemos para un punto descrito usando los valores r, φ y θ la siguiente representación

$$\vec{r}(r, \varphi, \theta) = (r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, r \cos\varphi).$$

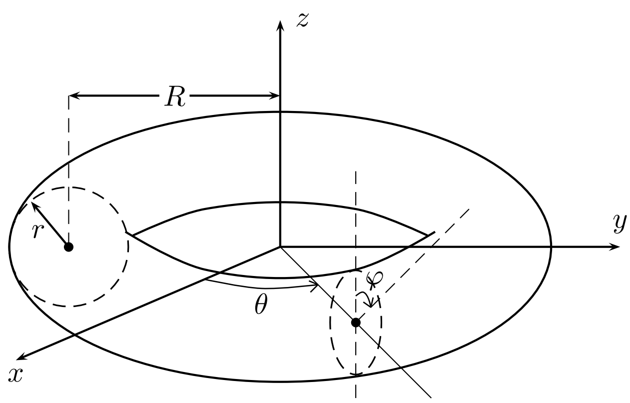
a) r, θ y φ en función de x, y y z.

b) Encuentre los vectores unitarios $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$.

c) Calcule el elemento de superficie en coordenadas esféricas para las superficies definidas por *i)* $r = r_0$, *ii)* $\theta = \theta_0$ y *iii)* $\varphi = \varphi_0$.

d) Calcule el área de una esfera de radio R fijo.

P3. *Coordenadas Toroidales*
Dado un radio mayor R fijo, la posición de un punto $\vec{P}$ queda determinada por un radio menor r y dos ángulos θ y φ como muestra la figura.



El vector posición viene dado por:

$$\vec{r}\,(r, \theta, \varphi) = ((R + r \sin\varphi)\cos\theta, (R + r \sin\varphi)\sin\theta, r\cos\varphi)\,, \qquad r \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in [0, \pi]$$

a) Encuentre los vectores unitarios $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$.

b) Calcule el elemento de superficie para las superficies definidas por *i)* $r = r_0$, *ii)* $\theta = \theta_0$ y *iii)* $\varphi = \varphi_0$.

c) Calcule el área de un toro de radio menor $r = r_0$, e interprete su resultado geométricamente.

P4. Sea Σ la superficie simple y regular descrita por la ecuación vectorial

$$\vec{r} = g(r, \theta) = (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \theta < 2\pi$$

a) Trazar y describir la superficie Σ.

b) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).

c) Hallar el elemento de área de Σ.