

Clase Auxiliar N°6: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer

Auxiliar: Emilio Vilches

2 de Mayo de 2008

Teorema: Sea $\vec{f} = (f_1, f_2)$ un campo vectorial de clase C^1 sobre un conjunto abierto, simplemente conexo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene a una curva de Jordan Γ , simple y seccionalmente regular. Sea A la región formada por Γ y su interior, entonces

$$\iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy$$

Corolario: Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y R una región contenida en A cuya frontera Γ es una curva de Jordan, simple y seccionalmente regular, entonces

$$c(R) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy \quad (1)$$

donde $c(R)$ denota el área de la región R .

Definición: Sea $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 , se define el laplaciano de ϕ como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

Definición: Sea $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , se define la derivada normal de ϕ como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \hat{n}$$

P1. Sean f y g campos escalares de clase C^2 sobre un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^2$. Sea R una región contenida en A cuya frontera Γ es una curva de Jordan, simple y seccionalmente regular. Probar las siguientes identidades

a)

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g dx dy$$

b)

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy$$

c)

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} ds - g \frac{\partial f}{\partial n} ds = \iint_R (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy$$

d) Suponga ahora que f y g son armónicas sobre R , es decir $\nabla^2 g = \nabla^2 f = 0$ sobre R , Probar que

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial n} ds$$

P2. Probar que

$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

sobre cualquier curva Γ simple, seccionalmente regular de Jordan que contiene al origen.

P3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y Γ una curva de Jordan, seccionalmente regular contenida en S , parametrizada en coordenadas polares. Demuestre que

$$c(A) = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta$$

Solución: Utilizando la fórmula (1)

$$c(R) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy$$

pero Γ está parametrizada en coordenadas polares, luego

$$\begin{aligned} x(\theta) &= r(\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) &= r(\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta = [r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta)] d\theta \\ dy &= \frac{dy(\theta)}{d\theta} d\theta = [r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta)] d\theta \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} c(R) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (-r(\theta) \sin(\theta) [r'(\theta) \cos(\theta) - r(\theta) \sin(\theta)] + r(\theta) \cos(\theta) [r'(\theta) \sin(\theta) + r(\theta) \cos(\theta)]) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (r^2(\theta) \sin^2(\theta) + r^2(\theta) \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

P4. Calcular el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas $r = 3 \sin(2\theta)$.

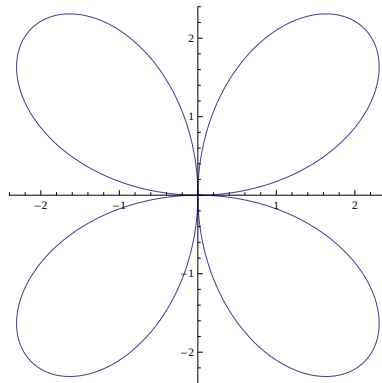


Figura 1: Rosa de cuatro hojas.

Solución: Usando (P3)

$$\begin{aligned}c(R) &= \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (3 \sin(2\theta))^2 d\theta = \frac{9\pi}{4}\end{aligned}$$

P5. Calcular el área encerrada por el cardioide de ecuación $r = 1 - \cos(\theta)$

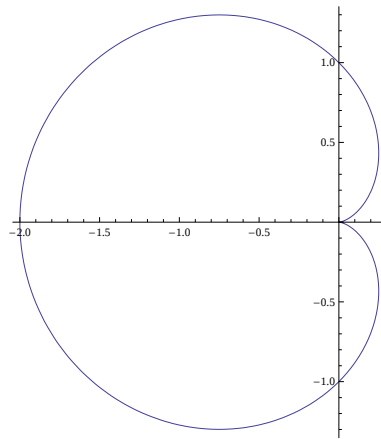


Figura 2: Cardioide.

Solución: Usando (P3)

$$\begin{aligned}c(R) &= \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta))^2 d\theta = 3\pi\end{aligned}$$