Clase Auxiliar N°5: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

25 de Abril de 2008

P1. *Cuádricas*
Una cuádrica es el lugar geométrico de los puntos del espacio (x, y, z) que verifican la ecuación de segundo grado:

$$Bx^2 + Cy^2 + Dz^2 + Exy + Fxz + Hx + Ly + Mz + N = 0$$

Estudie la cuádrica para los siguientes casos:

a) $B > 0, C > 0, D > 0$, $E = F = H = L = M = 0$ y $N < 0$. *[Elipsoide].*
b) $B > 0, C > 0, M < 0$ y $D = E = F = H = L = N = 0$. *[Paraboloide elíptico].*
c) $B > 0, C < 0, M < 0$ y $D = E = F = H = L = N = 0$. *[Paraboloide hiperbólico].*
d) $B > 0, C > 0, D < 0$, $E = F = H = L = M = 0$ y $N < 0$. *[Hiperboloide de una hoja].*
e) $B > 0, C > 0, D < 0$, $E = H = F = L = M = 0$ y $N > 0$. *[Hiperboloide de dos hojas].*
f) $B > 0, C > 0, D < 0$, $E = H = F = L = M = N = 0$. *[Cono].*
g) $B > 0, C > 0$, $D = E = H = F = L = M = 0$ y $N < 0$. *[Cilindro elíptico].*
h) $B > 0, C < 0$, $D = E = H = F = L = M = 0$ y $N < 0$. *[Cilindro hiperbólico].*

P2. Sea $\mathcal{C}$ una curva simple regular y $\vec{r}_0 : [0, L(\mathcal{C})] \to \mathbb{R}^3$ su parametrización en longitud de arco. Considere la superficie Σ parametrizada por

$$\begin{aligned} \vec{r} \;:\; & [0, L(\mathcal{C})] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ & (s, \theta) \mapsto \vec{r}(s, \theta) := \vec{r}_0(s) + a\cos(\theta)\hat{N}(s) + a\sin(\theta)\hat{B}(s) \end{aligned}$$

donde $\hat{N}(s)$ y $\hat{B}(s)$ representan los vectores normal y binormal a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\vec{r}_0(s)$, y $a \geq 0$ es una constante tal que $a \leq 1/k(s)$ para todo $s \in [0, L(\mathcal{C})]$.

(a) Bosqueje la superficie Σ.
(b) Encuentre el plano tangente a la superficie en el punto $\vec{r}(s_0, \theta_0)$ para $s_0 \in [0, L(\mathcal{C})]$ y $\theta_0 \in [0, 2\pi]$.
(c) Calcule la normal $\hat{n} = \hat{n}(s, \theta)$ a la superficie.

P3. Considere el paraboloide $P \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z = 1 + \rho^2$, $\rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]$ (en coordenadas cilíndricas).

(a) Bosqueje la superficie P.
(b) Considere la sección S de P que queda dentro del cilindro $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Encuentre una parametrización para S indicando su dominio de definición.
(c) Encuentre el plano tangente a S en el punto $R = (x_0, y_0, z_0) \in S$.
(d) Calcule el vector normal unitario a S.

P4. Dada una función no-negativa y diferenciable $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$ y verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r}_1(x, \theta) = x\hat{\imath} + f(x)\hat{\rho}$.