

Pauta Control 1: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer

Auxiliar: Emilio Vilches

26 de Abril de 2008

P1. Sea Γ una curva regular descrita por la función vectorial:

$$\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Si se verifica que todas las normales principales de la curva Γ pasan por un punto fijo, probar que la traza de la curva Γ es una circunferencia.

Solución:

Sea P_0 dicho punto y supongamos sin pérdida de generalidad que $\vec{f}$ es la parametrización en longitud de arco. Dado que todas las normales principales pasan por P_0 y además la curva es regular, debe existir una función escalar $\varphi(s): [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, tal que

$$P_0 = f(s) + \varphi(s)\hat{N}(s) \quad (1)$$

[2.0 ptos.]

derivando la relación (1) con respecto a s ;

$$0 = f'(s) + \frac{d\varphi}{ds}\hat{N} + \varphi(s)\frac{d\hat{N}}{ds} \quad (2)$$

usando las fórmulas de Frenet y el hecho de que $\vec{f}$ es la parametrización natural en (2);

$$0 = \hat{T} + \frac{d\varphi}{ds}\hat{N} + \varphi(s)(-\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}) \quad (3)$$

[2.0 ptos.]

reordenando

$$0 = (1 - \kappa\varphi(s))\hat{T} + \frac{d\varphi}{ds}\hat{N} + \varphi(s)\tau\hat{B} \quad (4)$$

como los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$ y $\hat{B}$ son linealmente independientes;

$$\begin{aligned} 1 - \kappa\varphi(s) &= 0 \\ \frac{d\varphi}{ds} &= 0 \\ \varphi(s)\tau &= 0 \end{aligned}$$

[1.0 ptos.]

de la segunda ecuación se deduce que $\varphi = cte$, con esto en la tercera se tiene que $\tau = 0$, es decir Γ es plana y de la primera se deduce que $\kappa = cte$, por lo tanto Γ es una circunferencia. [1.0 ptos.]

P2. Una partícula se mueve sobre la curva Γ de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3t^2 \\ y(t) &= 2t^3 \\ z(t) &= 3t \end{aligned}$$

Encontrar en $t = 1$.

- a) Su velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$.
- b) Los vectores unitarios $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ de su trayectoria.
- c) La curvatura κ y torsión τ de su trayectoria.
- d) Las componentes tangencial y normal de $\vec{a}$.
- e) El plano osculador de la trayectoria.

Solución:

- a) La parametrización de la curva esta dada por $\vec{r}(t) = (3t^2, 2t^3, 3t)$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (6t, 6t^2, 3)$$

$$v(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{36t^2 + 36t^4 + 9} = 3(1 + 2t^2)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = (6, 12t, 0)$$

$$a(t) = \|\vec{r}''(t)\| = \sqrt{36 + 144t^2}$$

$$\vec{r}'''(t) = (0, 12, 0)$$

de donde $\vec{v}(1) = \vec{r}'(1) = (6, 6, 3)$ y $\vec{a}(1) = \vec{r}''(1) = (6, 12, 0)$.

[1.2 ptos.]

- b) por definición

$$\hat{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|}$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

luego

$$\hat{T}(1) = \frac{1}{9}(6, 6, 3)$$

$$\hat{N}(1) = \frac{1}{9}(-2, 4, -2)$$

$$\hat{B}(1) = \frac{1}{9}(-4, 2, 4)$$

[1.2 ptos.]

- c) Usamos las fórmula de la curvatura y la torsión vistas en clase:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t)\|^2}$$

luego

$$\kappa(1) = \frac{2}{27}$$

$$\tau(1) = \frac{2}{27}$$

- d) Sabemos que $\vec{a} = a_t \hat{T} + a_n \hat{N}$ donde $a_t = \vec{a} \cdot \hat{T}$ y $a_n = \vec{a} \cdot \hat{N}$.
Así

[1.2 ptos.]

[0.6 ptos.]

$$a_t = (6, 12, 0) \cdot \frac{1}{9}(6, 6, 3) = 12$$

$$a_n = (6, 12, 0) \cdot \frac{1}{9}(-2, 4, -2) = 4$$

[0.6 ptos.]

- e) La ecuación del plano osculador para t fijo, está dado por;

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = f(t) + \alpha \hat{T} + \beta \hat{N}$$

luego

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = (3, 2, 3) + \alpha \frac{1}{9}(6, 6, 3) + \beta \frac{1}{9}(-2, 4, -2)$$

[1.2 ptos.]

P3. Demuestre el conocimiento de la función vectorial

$$s \mapsto \hat{B}(s) \quad \text{Vector binormal en función de la longitud de arco } s.$$

de una curva Γ cuya torsión $\tau(s)$ nunca es nula. Determina la curvatura $\kappa(s)$ y el valor absoluto de la torsión $\tau(s)$ de Γ .

Solución:

Supongamos conocido $\hat{B}(s)$ luego;

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}$$

de donde

$$\left\| \frac{d\hat{B}}{ds} \right\| = |\tau| \tag{5}$$

[2 ptos.]

por otro lado sabemos que $\hat{T} = \hat{N} \times \hat{B}$ por lo tanto

$$\hat{T} = -\frac{1}{\tau} \frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{B} \tag{6}$$

derivando la relación (6) se obtiene que:

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{\tau} \frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{B} \right)$$

[2.0 ptos.]

tomando norma y desarrollando

$$\begin{aligned} \kappa &= \left\| \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{\tau} \frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{B} \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau} \right) \frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{B} + \left(\frac{1}{\tau} \right) \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2} \times \hat{B} + \left(\frac{1}{\tau} \right) \frac{d\hat{B}}{ds} \times \frac{d\hat{B}}{ds} \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{-1}{\tau^2} \right) \frac{d\tau}{ds} \frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{B} + \left(\frac{1}{\tau} \right) \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2} \times \hat{B} \right\| \end{aligned}$$

pero la torsión nunca se anula, luego;

(i) si $\tau > 0$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\left\| \frac{d\hat{B}}{ds} \right\| \right) = \frac{1}{\left\| \frac{d\hat{B}}{ds} \right\|} \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2} = \frac{1}{|\tau|} \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2}$$

(ii) si $\tau < 0$

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\left\| \frac{d\hat{B}}{ds} \right\| \right) = -\frac{1}{\left\| \frac{d\hat{B}}{ds} \right\|} \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2} = \frac{-1}{|\tau|} \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2}$$

finalmente

$$\kappa(s) = \left\| \left(\frac{\pm 1}{\tau^2} \right) \frac{1}{|\tau|} \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2} \left(\frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{B} \right) + \left(\frac{1}{\tau} \right) \frac{d^2 \hat{B}}{ds^2} \times \hat{B} \right\|$$

[2.0 ptos.]

P4. Sea

$$\vec{f} = -\left(\frac{k}{r^2}\right) \vec{r} \quad (r = \|\vec{r}\|)$$

una fuerza central que mueve a una partícula P a lo largo de la hélice circular derecha Γ , definida por la función vectorial:

$$\vec{r}(\phi) = a \cos \phi \hat{i} + a \sin \phi \hat{j} + b\phi \hat{k} \quad (a > 0 \wedge b > 0)$$

Hallar el trabajo realizado por $\vec{f}$ al mover el punto P desde el punto $\phi = 0$ al punto $\phi = \pi$.

Solución:

Primera forma:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{r}(\phi)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\phi} d\phi$$

[2.0 ptos.]

Calculamos $\frac{d\vec{r}}{d\phi}$ y r :

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = (-a \sin \phi, a \cos \phi, b)$$

y

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi + b^2 \phi^2} = \sqrt{a^2 + b^2 \phi^2}$$

[2.0 ptos.]

entonces

$$W = \int_0^1 -\frac{k}{a^2 + b^2 \phi^2} \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ a \sin \phi \\ b\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \phi \\ a \cos \phi \\ b \end{pmatrix} d\phi = \int_0^{\pi} \frac{-kb^2 \phi}{a^2 + b^2 \phi^2} d\phi = \frac{k}{b^2} \ln \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \pi^2}} \right)$$

[2.0 ptos.]

Segunda forma:

Notamos que $\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2} \vec{r} = -\frac{k}{r} \hat{r}$; luego un potencial para $\vec{f}$ estará dado por $\phi(r) =$

$-k \ln(r)$.
en efecto:

[2.0 ptos.]

$$\nabla \phi(r) = -k \nabla \ln(r) = \frac{k}{r} \frac{2\vec{r}}{2r} = \frac{k}{r^2} \vec{r}$$

[2.0 ptos.]

claramente $\phi(r)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ a lo largo de Γ (pues Γ no pasa por el origen). entonces

$$W = \phi(r(\pi)) - \phi(r(0)) = -\ln r(\pi) + \ln r(0) = \ln \frac{r(0)}{r(\pi)}$$

con $r(0) = \|\vec{r}(0)\| = \|(a, 0, 0)\| = a$ y $r(\pi) = \|\vec{r}(\pi)\| = \|(-a, 0, b\pi)\| = \sqrt{a^2 + b^2\pi^2}$ y por lo tanto

$$W = \frac{k}{b^2} \ln \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2\pi^2}} \right)$$

[2.0 ptos.]

P5. Un alambre uniforme tiene la forma de la porción de la curva de intersección de las superficies de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ e $y^2 = x$ que conectan los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1\sqrt{2})$. Hallar la coordenada $\bar{z}$ del baricentro G del alambre.

Solución:

Sea $L = (\Gamma, \delta)$ el alambre, como es uniforme se tiene que δ es constante.

(i) Parametrización:

tomando $y = t$ se obtiene la parametrización:

$$\vec{r}(t) = (t^2, t, \sqrt{t^4 + t^2}) \quad t \in [0, 1]$$

[1.2 ptos.]

(ii) definición del baricentro:

$$\bar{z} = \frac{\int_{\Gamma} z \delta d\ell}{\int_{\Gamma} \delta d\ell}$$

y como δ es constante se tiene que

$$\bar{z} = \frac{\int_{\Gamma} z d\ell}{\int_{\Gamma} d\ell}$$

[1.2 ptos.]

(iii) Cálculo de $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ y $\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\|$:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (2t, 1, \frac{2t^3 + t}{\sqrt{t^4 + t^2}})$$

y

$$\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\| = \sqrt{4t^2 + 1 + \frac{(2t^3 + t)^2}{t^4 + t^2}} = \sqrt{\frac{8t^4 + 9t^2 + 2}{t^2 + 1}}$$

[1.2 ptos.]

(iv) Cálculo de $\int_{\Gamma} z d\ell$:

$$\int_{\Gamma} z d\ell = \int_0^1 \sqrt{t^4 + t^2} \cdot \sqrt{\frac{8t^4 + 9t^2 + 2}{t^2 + 1}} dt = \int_0^1 t \sqrt{8t^4 + 9t^2 + 2} dt$$

[1.2 ptos.]

(v) Cálculo de $\int_{\Gamma} d\ell$:

$$\int_{\Gamma} d\ell = \int_0^1 \sqrt{\frac{8t^4 + 9t^2 + 2}{t^2 + 1}} dt$$

[1.2 ptos.]

(vi) Cálculo de $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^1 t \sqrt{8t^4 + 9t^2 + 2} dt}{\int_0^1 \sqrt{\frac{8t^4 + 9t^2 + 2}{t^2 + 1}} dt}$$