Clase Auxiliar Extra: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

23 de Abril de 2008

P1. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y-z)\hat{\mathrm{i}} + (z-x)\hat{\mathrm{j}} + (x-y)\hat{\mathrm{k}}$
Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{r}(\varphi) = (a \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha, a \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha, a\cos\varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

donde $a > 0$ y $0 < \alpha < \pi$.
Compruebe que dicha curva está en la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $y = \tan\alpha$, y demuestre que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a lo largo de ella es: $\pm 2\pi a^2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$; interprete el signo.

P2. Probar que si un punto se mueve de tal manera que su velocidad $\vec{v}$ y su aceleración $\vec{a}$ tienen siempre longitudes unitarias, entonces la curvatura κ es igual a 1 en todos los puntos de la trayectoria.

P3. Si f y g son campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ sobre un conjunto abierto y conexo S de plano. Demostrar que

$$\oint f\nabla g \cdot d\vec{r} = \oint g\nabla f \cdot d\vec{r}$$

para toda curva Γ contenida en S.

P4. Un campo de fuerzas viene dado en coordenadas polares por $\vec{F}(r,\theta) = 4\operatorname{sen}\theta\hat{i} - 4\operatorname{sen}\theta\hat{j}$. Calcular el trabajo efectuado al unir una partícula desde el punto $(1,0)$ hasta el origen siguiendo una espiral de ecuación polar $r = e^{-\theta}$.

P5. Sea $\vec{f}$ un campo vectorial definido por $\vec{f}(\vec{x}) = \frac{g'(r)}{r}\vec{x}$, con $r = \|\vec{x}\|$ en el que g es una función real con derivada continua en todo $\mathbb{R}$. Hallar una función potencial ϕ para este campo vectorial $\vec{f}$.

P6. Calcular $I = \int_{\mathcal{C}} xydx + yzdy + zxdz$ donde $\mathcal{C}$ es el arco de circunferencia definido por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2Ry$ $z = y$, el cual esta situado por el lado del plano y_{OZ} donde $x > 0$ y se recorre a partir del origen de coordenadas.

$$I = \oint_{\Gamma} (3x^2 + 2y)dx - (x + 3\cos y)dy$$

si Γ es la frontera del paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(1,1)$.