Guía Control 1: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

19 de Abril de 2008

P1. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y-z)\hat{\imath} + (z-x)\hat{\jmath} + (x-y)\hat{k}$
Considere la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{r}(\varphi) = (a \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha, a \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha, a\cos\varphi) \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

donde $a > 0$ y $0 < \alpha < \pi$.
Compruebe que dicha curva está en la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $y = \tan\alpha$, y demuestre que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a lo largo de ella es: $\pm 2\pi a^2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$; interprete el signo.

P2. Sea $\vec{F}(x,y) = cxy\hat{\imath} + x^6y^2\hat{\jmath}$, con $c > 0$, un campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, que debe moverse desde el origen del sistema de coordenadas hasta la recta $x = 1$ a lo largo de la curva:

$$y = ax^b \quad \text{donde } a, b > 0.$$

Encuentre un valor de a (en términos de c) de modo que el trabajo realizado por esta fuerza sea independiente de b.
Solución: $W = \frac{3ac + a^3 b}{3(b+2)}$, $a = \sqrt{\frac{3c}{2}}$

P3. Considere aquella curva Γ sobre la superficie del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = z$, que al ser descrita en coordenadas cilíndricas, las variables $\rho \geq 0$ y $\theta \in [0, \infty)$ satisfacen la ecuación diferencial:

$$\tfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho \quad \rho(0) = 1 \quad \tfrac{d\rho}{d\theta}(0) = -1$$

a) Obtenga una parametrización para la curva en términos de θ y bosquéjela.

b) Imagine que la curva es un alambre cuya densidad lineal de masa es $\rho(x,y,x) = \sqrt{1+2z}$. Calcule la masa total del alambre.

Solución: $\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta, e^{-2\theta})$, $M = \frac{5}{3}\sqrt{2}$

P4. Considere la curva Γ descrita por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^2$ donde $a > 0$. Encuentre una parametrización de Γ y calcule su largo.

P5. Probar que si un punto se mueve de tal manera que su velocidad $\vec{v}$ y su aceleración $\vec{a}$ tienen siempre longitudes unitarias, entonces la curvatura κ es igual a 1 en todos los puntos de la trayectoria.

P6. Si $\vec{T}$ es el vector tangente unitario a una curva regular Γ, descrita por la función vectorial $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, en un punto P de ella, Probar que:

$$[\vec{T}' \; \vec{T}'' \; \vec{T}'''] = \kappa^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)$$

donde τ es la torsion y κ es la curvatura de Γ.

P7. Sea la hélice descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) =& a\cos(t) \\ y(t) =& a\sin(t) \\ z(t) =& at\tan(\alpha) \end{aligned}$$

donde α, a constantes y $a > 0$. Se pide:

(i) Hallar los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$ en función del parámetro t.

(ii) Probar que $\hat{T}$ y $\hat{B}$ forman un ángulo constante con el eje $\hat{z}$ y que $\hat{N}$ es perpendicular a éste eje y dirigido hacia el.

(iii) Probar que la curvatura κ y la torsión τ quedan expresadas por:

$$\kappa = \frac{\cos^2\alpha}{a}$$
$$\tau = \frac{-\sin\alpha\cos\alpha}{a}$$

P8. Sea Γ la curva regular descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = a\cos(ht)$$
$$y = a\,\mathrm{sen}(ht)$$
$$z = bt$$

Hallar los valores de a y b de manera que se cumpla que la curvatura k es igual a la torsión τ.

P9. Sea Γ la curva definida por la intersección de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$ y el cono de ecuación $z^2=x^2+y^2$. Calcular la integral de linea $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{r}$ si $\vec{f}$ es el campo vectorial definido por

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2+z)\vec{i} + (y^2+x)\vec{j} + (z^2+y)\vec{k}$$

P10. Si f y g son campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ sobre un conjunto abierto y conexo S de plano. Demostrar que

$$\oint f\nabla g\cdot d\vec{r} = \oint g\nabla f\cdot d\vec{r}$$

para toda curva Γ contenida en S.
Indicación: Recuerde que si f y g son campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ entonces $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

P11. Hallar los vectores $\hat{T}$, $\hat{N}$,$\hat{B}$, la curvatura κ y la torsión τ de la curva definida por $f(t)=(3t,3t^2,2t^3)$ en $t=0$ y $t=1$.
Solución:
en $t=0$: $\hat{T}=(1,0,0)$,$\hat{N}=(0,1,0)$,$\hat{B}=(0,0,1)$,$\kappa=\frac{2}{3}$, $\tau=\frac{2}{3}$.
en $t=1$: $\hat{T}=\frac{1}{3}(1,2,2)$,$\hat{N}=\frac{1}{3}(-2,-1,2)$,$\hat{B}=\frac{1}{3}(2,-2,1)$,$\kappa=\frac{2}{27}$, $\tau=\frac{2}{27}$.

P12. Un campo de fuerzas viene dado en coordenadas polares por $\vec{F}(r,\theta)=4\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath}-4\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}$. Calcular el trabajo efectuado al unir una partícula desde el punto $(1,0)$ hasta el origen siguiendo una espiral de ecuación polar $r=e^{-\theta}$.
Solución: $W=-\frac{8}{5}$.

P13. Sea $\vec{f}$ un campo vectorial definido por $\vec{f}(\vec{x})=\frac{g'(r)}{r}\vec{x}$, con $r=\|\vec{x}\|$ en el que g es una función real con derivada continua en todo $\mathbb{R}$. Hallar una función potencial ϕ para este campo vectorial $\vec{f}$.
Solución: $\phi(\vec{x})=g(\|\vec{x}\|)+C$.

P14. Determinar la masa de un alambre que toma el contorno de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si su densidad δ en cada punto $P=(x,y)$ es $\delta(x,y)=|x|$.
Solución: $M=\frac{2ab^2}{\sqrt{|a^2-b^2|}}\left(\frac{a}{b}\sqrt{|(\frac{a}{b})^2-1|}+\operatorname{arccosh}(\frac{a}{b})\right)$

P15. Calcular $I=\int_{\mathcal{C}} xydx+yzdy+zxdz$ donde $\mathcal{C}$ es el arco de circunferencia definido por la intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=2Ry$ $z=y$, el cual esta situado por el lado del plano y_{OZ} donde $x>0$ y se recorre a partir del origen de coordenadas.
Solución: $I=R^3\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\right)$.

P16. Sea la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x(t) =& a(3t - t^3) \\ y(t) =& 3at^2 \\ z(t) =& a(3t + t^3) \end{aligned}$$

Probar que $\kappa = \tau$.

P17. Una partícula se mueve en el plano a lo largo de la espiral $r = e^\theta$ con una rapidez de v $[m/s]$.

(i) Hallar la velocidad y la aceleración en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(ii) ¿Cuánto tarda la partícula en ir desde el punto correspondiente a $\theta = 0$ hasta el punto correspondiente a $\theta = \pi$?.

(iii) si $\theta = 0$ cuando $t = 0$, hallar las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la partícula.

Solución: Revisar auxiliar 1.

P18. Si Γ_1 y Γ_2 son curvas regulares equivalentes paramétricamente, descritas por las funciones vectoriales $\vec{r}$ y $\vec{R}$ sobre $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ respectivamente. Probar que $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2)$.

P19. Calcular la integral curvilínea

$$I = \oint_\Gamma (3x^2 + 2y)dx - (x + 3\cos y)dy$$

si Γ es la frontera del paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(1, 1)$.
Solución: $I = -6$.