Clase Auxiliar N°4: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Matías Godoy

18 de Abril de 2008

P1. Sea $\vec{F} = z^2\hat{i} + (z\sin y)\hat{j} + (2z + 2xz - \cos y)\hat{k}$

a) Encuentre el potencial de $\vec{F}$

b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde C es la porcion de la curva $x = t^3$, $y = 1 - t^2$, $z = t$ para $|t| \leq 1$

c) Sea ahora $\vec{H} = y^2\hat{i} + 2y(x+z)\hat{j} + (y^2 + z^2)\hat{k}$
Determine el potencial de este nuevo campo

d) Determine la ecuacion de la superficie S con la siguiente propiedad: $\int_P^Q \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$ para P y Q cualesquiera en la superficie S

P2. Dado $\vec{F} = |r|^2 r$, Pruebe que este campo es conservativo, y determine su potencial escalar asociado

P3. Sea $\vec{F} = (y^2\cos x + z^3)\hat{\imath} + (2y\sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2)\hat{k}$.

a) Encuentre g tal que $\vec{F} = \nabla g$

b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva:
$x(t) = \sqrt{2\pi - t}\cos t$
$y(t) = \sqrt{2\pi - t}\sin t$
$z(t) = t$ entre $[0, 2\pi]$

P4. Calcule la integral de trabajo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial $\vec{F} = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ sobre la helice Γ que une los puntos $P = (1,0,0)$ y $Q = (1,0,1)$ dando una sola vuelta.

P5. Sea $\vec{F} = 2xyz^2\hat{i} + (x^2z^2 + z\cos yz)\hat{j} + (2x^2yz + y\cos yz)\hat{k}$
Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con C cualquier camino que parta desde $(0,0,1)$ y llegue a $(1, \frac{\pi}{4}, 2)$

P6. Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones escalares de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Considere los campos vectoriales definidos por $\vec{w_1} = u(x,y)\hat{i} + v(x,y)\hat{j}$ y $\vec{w_2} = v(x,y)\hat{i} - u(x,y))\hat{j}$

a) Pruebe que w_1 y w_2 son ambos conservativos si y solo si:
$(\star) \Leftrightarrow (\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}) \wedge (\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x})$

Decimos que dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son conjugadas cuando satisfacen $(\star)$

b) Pruebe que si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son conjugadas de clase $\mathcal{C}^2$ entonces ambas son armonicas, i.e. $\triangle u = \triangle v = 0$ ademas pruebe que $\nabla u \nabla v = 0$

c) Demuestre que si $u(x,y)$ es armonica, entonces existe $v(x,y)$ conjugada de u
Hint: Pruebe que el campo definido por $\vec{w} = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\hat{i} - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\hat{j}$ es conservativo