Clase Auxiliar N°3: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

11 de Abril de 2008

P1. Considere la curva Γ que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, donde $a > 0$.

a) Encuentre una parametrización para Γ.

b) Suponga que Γ es un alambre con densidad de masa $\rho(x, y, z) = \frac{2a}{\sqrt{8a^2 - x^2 - y^2}}$. Calcule la masa del alambre.

P2. Sea Γ la curva definida por la intersección de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$. Calcular la integral de linea $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{f}$ es el campo vectorial definido por

$$\vec{f}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$$

P3. Hallar el valor de la integral de linea $\int \vec{f} \cdot d\vec{r}$ del campo vectorial $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que une el origen de coordenadas con el punto $(1, 1, 1)$ y que esta definida por la intersección de las superficies de ecuaciones $y = x^2$, $z = x^3$.

P4. Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña.

a) Utilizando coordenadas cilíndricas, deducir una parametrización de Γ sabiendo que se satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$ con $a > 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.

b) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (y^2/2, y(x + z), y^2/2)$. Calcular el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de Γ.

P5. Calcular la integral curvilínea $\oint ydz + zdx + xdy$ donde Γ es la circunferencia definida por la intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y = 1$ (orientar la curva Γ en el sentido que desee).

P6. Probar que la integral de linea $\int 2xydx + (x^2 + 2yz)dy + (y^2 + 1)dz$ donde Γ es una curva regular que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 0, 2)$ es independiente a la trayectoria y evaluarla.

P7. Un alambre tiene la forma de una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. Hallar su masa y su momento de inercia respecto a un diámetro si su densidad δ en un punto (x, y) vale $\delta(x, y) = 2|x| + |y|$.