<u>Pauta P5 Control 3</u>

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

5.- Si $\phi : A \subset R^3 \to R$ es un campo escalar diferenciable dos veces sobre *A*.

a) Determinar el Laplaciano $\nabla^2 \phi$ en coordenadas esféricas.

b) Hallar las soluciones de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ en que el campo escalar ϕ sólo depende de la distancia *r*.

<u>*Sol:*</u>

a)

Forma 1:

Sabemos que en coordenadas curvilíneas, se tiene que:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u_3}\right)\right)$$

En coordenadas esféricas se tiene que:

$$u_1 = \hat{r} \qquad h_1 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right\| = 1$$

$$u_2 = \hat{\varphi} \qquad h_2 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| = rsen\theta$$

$$u_3 = \hat{\theta} \qquad h_3 = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = r$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 sen\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 sen\theta \frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}\right)+\frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)$$

Forma 2:

$$\nabla^2\phi = div(\nabla\phi)$$

y sabemos que en coordenadas esféricas

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\hat{r} + \frac{1}{rsen\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta A_\theta\right)$$

$$\Rightarrow div(\nabla\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{rsen\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

b)

Por la parte a) la ecuación de Laplace en esféricas queda de la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

pero ϕ solo depende de r, así que

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$$

y la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

nuevamente por que ϕ solo depende de r estas derivadas parciales se pueden tratar como derivadas fuertes y ocupar el conocimiento de EDO.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = C$$

$$\Rightarrow \phi(r) = C\int \frac{1}{r^2} + \tilde{C} = \tilde{C} - \frac{C}{r}$$

con $C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 punto)
- Encontrar el Laplaciano en coordenadas esféricas por alguna de las dos formas (3.0 Puntos) (obs: No se podía llegar y poner, ni sacar cosas no demostradas en clases)
- Observar que dos derivadas parciales son iguales a cero, debido a que solo depende del radio (1.0 Puntos)
- Resolver las integrales parciales con el conocimiento de EDO (1.0 Puntos)
- Llegar al resultado correcto (1.0 Puntos)