Pauta P3 Control 3

Matemáticas Aplicadas MA26B

Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

3.- Dada la función numérica $u:(x,y)\to u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

a) Hallar otra función numérica $v:(x,y)\to v(x,y)$ tal que forme con la dada una función f holomorfa de la variable $z=x+iy$

b) Hallar $z\to f(z)$

Sol:

a) Tenemos que $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, y conocemos $u(x,y)$, el que está definido para todo el plano complejo, salvo el origen. Además sabemos que para que f sea holomorfa debe cumplir las condiciones de Cauchy-Riemmann.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

De la primera se obtiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\int\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy+c(x)$$

$$=-\int\frac{y^2+x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy+c(x)$$

pero $\dfrac{y^2+x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

$$\Rightarrow v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}+c(x)$$

falta encontrar $c(x)$, así que procedemos con la segunda ecuación de la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} + c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = cte$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + cte$$

b) Escribimos f

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + cte\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + icte = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + icte$$

<u>Asignación de Puntaje:</u>

- Punto Base (1 punto)
- Ocupar una ecuación de Cauchy-Riemmann y resolver una integral parcial (3.0 Puntos) (obs: Se debe poner que aun existe una función dependiente de x)
- Ocupar la segunda Ecuación de Cauchy-Riemmann para encontrar la función (2.5 Puntos)
- Encontrar f (0.5 Puntos)