Pauta P1 Control 3

Matemáticas Aplicadas MA26B
Semestre Primavera 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Hortencia Jorquera - Felipe Maldonado

1.- Sea S la región del plano complejo $\mathbb{C}$ definido por las condiciones

$$1 \le |z| \le 2$$
$$-\pi/4 \le \arg(z) \le \pi/4$$

Hallar el área de la región obtenida en la transformación $z \to \omega = z^2$

Sol:

Sea $z = x + iy$, entonces:

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

Llamamos entonces

$$u(x,y) = (x^2 - y^2)$$
$$v(x,y) = 2xy$$

A modo de simplificar el cálculo, pasaremos a un sistema de coordenadas polares, en donde

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho sen\phi \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \\ \phi = arctg\left(y/x\right) = \arg(z) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u = r^2(\cos^2\phi - sen^2\phi) = r^2\cos(2\phi) \\ v = 2r^2 sen\phi\cos\phi = r^2 sen(2\phi) \end{array}$$

Entonces sean:

$$R = r^2 \qquad \theta = 2\phi$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} 1 \le R \le 4 \\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} u = R\cos\theta \\ v = Rsen\theta \end{array}$$

Así es fácil notar que se trata de la mitad de un anillo de radio exterior 4 e interior 1, así que el área encerrada es:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{4} RdRd\theta = \left(\frac{4^2 - 1^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{15}{2}\pi$$

<u>Asignación de Puntaje:</u>

- Punto Base (1 punto)
- Encontrar *z* en función de *x* e *y* (1 punto)
- Encontrar *u* y *v* (1.0 Puntos)
- Demostrar que el área a calcular es una son dos semianillos
  (obs: Destacar que hay que ver que cumplen las ecuaciones de circunferencias) (1.5 Puntos)
- Encontrar la integral y el valor (2.5 puntos)