Clase Auxiliar N°2: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer
Auxiliar: Emilio Vilches

4 de Abril de 2008

P1. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \tfrac{z^2}{h^2} \quad h > 0 \tag{1}$$

de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{array}{c} \frac{dz}{d\theta} = z \\ z(0) = h \end{array} \tag{2}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

a) Encuentre una parametrización para Γ y bosqueje la curva .

b) Encuentre la longitud de arco s y una expresión para la parametrización en longitud de arco de Γ.

c) Calcule la rapidez , el vector velocidad, tangente, normal y binormal .

d) Calcule la curvatura(κ) y la torsión(τ).

e) Verifique que

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Solución.

1. Encontremos una parametrización para Γ;

resolviendo la ecuación diferencial (2) se encuentra que:

$$z(\theta) = he^{\theta}$$

tomando ahora las coordenadas cilíndricas

$$\begin{array}{c} x = \rho \sin(\theta) \\ y = \rho \cos(\theta) \\ z = z \end{array} \tag{3}$$

además el triedro unitario asociado a las coordenadas cilíndricas esta dado por:

$$\begin{array}{c} \hat{\rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \\ \hat{\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \\ \hat{k} = (0, 0, 1) \end{array}$$

notemos también que en este sistema de coordenadas ortogonal se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{c} \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\rho} \end{array}$$

volviendo a la parametrización, reemplazando (3) en (1) encontramos la siguiente relación:

$$\rho^2 = \tfrac{z^2}{h^2} = e^{2\theta} \quad \Rightarrow \quad \rho = e^{\theta}$$

luego una parametrización de Γ esta dada por

$$\vec{r}\,(\theta) = \left(e^{\theta}\cos(\theta)\,, e^{\theta}\sin(\theta), he^{\theta}\right) = e^{\theta}\hat{\rho} + he^{\theta}\hat{k} \qquad \theta \geq 0 \tag{4}$$

2. Longitud de arco:

$$s\,(\theta) = \int_0^{\theta} \|\frac{d\vec{r}\,(\tau)}{d\tau}\| d\tau$$

calculamos $\frac{d\vec{r}(\theta)}{d\theta}$

$$\frac{d\vec{r}\,(\theta)}{d\theta} = e^{\theta}\hat{\rho} + e^{\theta}\hat{\theta} + he^{\theta}\hat{k}$$

luego

$$\|\frac{d\vec{r}\,(\theta)}{d\theta}\| = \sqrt{2+h^2}e^{\theta}$$

por lo tanto

$$s\,(\theta) = \sqrt{2+h^2}\left(e^{\theta}-1\right) \;\; .$$

Para encontrar una parametrización en longitud de arco debemos despejar θ en función de s y luego reemplazar en la parametrización de la parte anterior, notemos que esto no es siempre fácil de hacer y por lo general las expresiones obtenidas no son del todo amigables, por lo que es conveniente seguir (al momento de calcular el Triedro de Frenet) utilizando la parametrización ya encontrada y usar las formulas del Triedro obtenidas usando la regla de la cadena. Por otro lado la importancia de la parametrización en longitud de arco (o parametrización natural) es que con ella se recorre la curva a una velocidad constante e igual a 1.

Despejando θen función de s:

$$\theta\,(s) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2+h^2}}+1\right) \tag{5}$$

como θ se movía entre 0 e ∞, s varía entre 0 e ∞. reemplazando (5) en (4) se obtiene la parametrización natural:

$$\vec{r}\,(s) = \left(\left(\tfrac{s}{\sqrt{2+h^2}}+1\right)\cos\left(\ln\left(\tfrac{s}{\sqrt{2+h^2}}+1\right)\right), \left(\tfrac{s}{\sqrt{2+h^2}}+1\right)\sin(\ln\left(\tfrac{s}{\sqrt{2+h^2}}+1\right)), h\left(\tfrac{s}{\sqrt{2+h^2}}+1\right)\right) \qquad s \geq 0$$

se deja propuesto verificar que $\|\frac{d\vec{r}(s)}{ds}\| = 1$.

3. Recordemos las siguientes definiciones:

Velocidad:

$$\vec{v}\,(\theta) = \frac{d\vec{r}\,(\theta)}{d\theta}.$$

Rapidez:

$$v\,(\theta) = \|\vec{v}\,(\theta)\,\|$$

Vector Tangente:

$$T\,(\theta) = \frac{\vec{v}\,(\theta)}{v\,(\theta)}$$

Vector Normal:

$$N\,(\theta) = \frac{dT}{d\theta}/\|\frac{dT}{d\theta}\|$$

Vector Binormal:

$$B = T \times N$$

Algunos cálculos nos muestran que:

$$v(\theta) = \sqrt{2 + h^2}e^{\theta}$$

$$T(\theta) = \frac{\hat{\rho} + \hat{\theta} + h\hat{k}}{\sqrt{2 + h^2}}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{\hat{\theta} - \hat{\rho}}{\sqrt{2 + h^2}}$$
$$\left\| \frac{dT}{d\theta} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + h^2}}$$

de donde

$$N = \frac{\hat{\theta} - \hat{\rho}}{\sqrt{2}}$$

y

$$B = T \times N = \frac{2\hat{k} - h\hat{\rho} - h\hat{\theta}}{\sqrt{2}\sqrt{2 + h^2}}$$

4. La curvatura y la torsión están dadas por:

$$\kappa(\theta) = \left\| \frac{dT}{d\theta} \right\| / v(\theta)$$
$$\tau(\theta) = -N \cdot \left(\frac{dB}{d\theta} / v(\theta) \right)$$

luego

$$\kappa(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + h^2}} \frac{1}{e^{\theta}\sqrt{2 + h^2}} = \frac{\sqrt{2}}{e^{\theta}(2 + h^2)}$$

y para la torsión calculamos primero

$$\frac{dB}{d\theta} = \frac{-h\hat{\theta} + h\hat{\rho}}{\sqrt{2}\sqrt{2 + h^2}}$$

luego

$$\tau = \frac{h}{e^{\theta}(2 + h^2)}$$

5. de la parte anterior se tiene que

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{h}$$