

# Clase Auxiliar N°2: Matemáticas Aplicadas

Profesor: Orlando Hofer  
Auxiliar: Emilio Vilches

4 de Abril de 2008

**P1.** Sea  $\Gamma$  la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2} \quad h > 0 \quad (1)$$

de forma tal que la altura  $z = z(\theta)$  satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= z \\ z(0) &= h \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $z$  y  $\theta$  representan las coordenadas cilíndricas.

- Encuentre una parametrización para  $\Gamma$  y bosqueje la curva .
- Encuentre la longitud de arco  $s$  y una expresión para la parametrización en longitud de arco de  $\Gamma$ .
- Calcule la rapidez , el vector velocidad, tangente, normal y binormal .
- Calcule la curvatura ( $\kappa$ ) y la torsión ( $\tau$ ).
- Verifique que

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

**P2.** Hallar la función  $f: t \rightarrow f(t)$  ( $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ ) donde la curva  $\Gamma$  está descrita por las ecuaciones paramétricas  $x(t) = a \cos(t)$ ,  $y(t) = a \sin(t)$ ,  $z(t) = f(t)$  sea plana.

**P3.** Probar que las curvas descritas por las ecuaciones en coordenadas polares siguientes se intersectan formando un ángulo recto:

$$\begin{aligned} r &= a(1 + \cos \theta) \\ r &= a(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

**P4.** Sea la hélice descrita por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(t) \\ y(t) &= a \sin(t) \\ z(t) &= at \tan(\alpha) \end{aligned}$$

donde  $\alpha$ ,  $a$  constantes y  $a > 0$ . Se pide:

- Hallar los vectores  $\hat{T}$ ,  $\hat{N}$ ,  $\hat{B}$  en función del parámetro  $t$ .
- Probar que  $\hat{T}$  y  $\hat{B}$  forman un ángulo constante con el eje  $\hat{z}$  y que  $\hat{N}$  es perpendicular a éste eje y dirigido hacia el.
- Probar que la curvatura  $\kappa$  y la torsión  $\tau$  quedan expresadas por:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\cos^2 \alpha}{a} \\ \tau &= \frac{-\sin \alpha \cos \alpha}{a} \end{aligned}$$

**P5.** Hallar los puntos sobre la curva  $\Gamma$  descrita por las ecuaciones paramétricas  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $z(t) = \cos t$  en los cuales la curvatura  $\kappa$  presenta un valor mínimo.