

Calculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Profesor Auxiliar: Cristóbal Quiñinao

7 de septiembre de 2007

Desarrollos de Taylor y Primitivas:

Pregunta 1.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{-x}$

- Determinar $f^{(n)}(x)$, y en particular $f^{(n)}(0)$. Para ello use a regla de Leibnitz.
- Escriba el Polinomio de Taylor de $f(x)$ en $x = 0$.
- Determine el valor de n para calcular $f(0,1)$ con 5 decimales exactos.

Pregunta 2.- (Propuesto) Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2e^{-x}$.

- Escribir el Polinomio de Taylor de orden 3 con resto de Lagrange en torno a $x = 0$.
- Calcule $e^{-0,1}$ y estime el error cometido.

Pregunta 3.- Calcular, mediante cambio de variables, las siguientes primitivas:

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| i. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$ | iii. $\int e^x \sqrt{e^x+1} dx$ | v. $\int \ln(x)x^{-\frac{1}{2}} dx$ |
| ii. $\int \frac{1}{x \ln(x)(\ln^2(x)+1)} dx$ | iv. $\int \frac{\sec(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sec(x)}} dx$ | vi. $\int x^3 \sqrt[3]{x^2+1} dx$ |

Pregunta 4.- Calcule $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$, luego deduzca el valor de:

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|--|
| i. $\int \frac{1}{\cos(x)} dx$ | ii. $\int \frac{1}{1+\sin(x)} dx$ | iii. $\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)} dx$ |
|--------------------------------|-----------------------------------|--|

HINT: Le puede ser útil utilizar el cambio de variables $u = \tan(\frac{x}{2})$

Pregunta 5.- Calcular, mediante la integración por partes, las siguientes primitivas:

- | | | |
|-----------------------|---------------------------|------------------------------------|
| i. $\int xe^x dx$ | iii. $\int \arcsen(x) dx$ | v. $\int e^{-\sqrt{x}} dx$ |
| ii. $\int x^2 e^x dx$ | iv. $\int \ln(x) dx$ | vi. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ |

Pregunta 6.- Considere $I_n = \int \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Calcule una fórmula de recurrencia para I_n

Pregunta 7.- Sea $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$. Demuestre que:

$$(1+2n)I_n = 2x^n \sqrt{1+x} - 2n \cdot I_{n-1}$$

Solución:

Pregunta 1.-

i. Recordemos que la regla de Leibnitz dice que:

$$(h \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h(x)^{(k)} g(x)^{(n-k)}$$

luego tomando $h(x) = x$ y $g(x) = e^{-x}$ la derivada n -ésima se reduce a:

$$(h \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{(k)} (e^{-x})^{(n-k)} = \binom{n}{0} x (e^{-x})^{(n)} + \binom{n}{1} (e^{-x})^{(n-1)}$$

donde la última igualdad se debe al hecho que las derivadas de orden mayor o igual que 2 de la función x son nulas.

Ahora usamos las derivadas n -ésimas de la función exponencial para deducir que:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n x e^{-x} + n(-1)^{n-1} e^{-x}$$

Evalutando en $x = 0$ tenemos que $f^{(n)}(0) = n(-1)^{n-1}$

ii. La fórmula general del Polinomio de Taylor de orden n en un entorno de x_0 , ie, $V_\delta(x_0)$ con resto de Lagrange es:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x, \xi)$$

con $R_n(x, \xi) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1}$ y $\xi \in V_\delta(x_0)$.

Aplicando esto a la función de nuestro problema se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0) \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + R_n(x, \xi) \\ f(x) &= 0 + x - x^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} x^n + R_n(x, \xi) \\ f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{(k-1)!} + R_n(x, \xi) \end{aligned}$$

iii. Dado que queremos 5 decimales exactos necesitamos que:

$$|R_n(x, \xi)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1} \right| < 10^{-6}$$

usamos los cálculos que teníamos en i. para concluir que:

$$f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^{n+1} \xi e^{-\xi} + (n+1)(-1)^n e^{-\xi} = (-1)^n (n+1-\xi) e^{-\xi}$$

tomando módulo:

$$|R_n(x, \xi)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^n (n+1-\xi) e^{-\xi} x^{n+1} \right| = \left| \frac{n+1-\xi}{(n+1)!} e^{-\xi} x^{n+1} \right|$$

como $\xi \in (0, 0,1)$ y e^{-x} es decreciente se tiene que $e^{-\xi} < e^0 = 1$, con esto:

$$|R_n(x, \xi)| = \left| \frac{n+1-\xi}{(n+1)!} e^{-\xi} x^{n+1} \right| < \left| \frac{n+1-\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

donde la última desigualdad se debe a que $-\xi < 0$. Finalmente usamos que $x < 0,1$ y con esto buscamos un n tq:

$$\left| \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \right| < 10^{-6}$$

lo cual se tiene para $n = 4$ y posteriores. Concluimos que basta con un Polinomio de Taylor de orden 4 para obtener $f(0,1)$ con 5 decimales exactos.

Pregunta 3.-

i. Tenemos que calcular $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$, podemos reescribir esta primitiva de la forma:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \int \frac{x}{a\sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}} dx = \int \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}} dx$$

un primer cambio de variables es:

$$u = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{a} dx$$

asi reescribimos la integral:

$$\int \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}} dx = \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} a du$$

Hacemos un segundo cambio de variable:

$$\sinh(v) = u \quad \Rightarrow \quad \cosh(v) dv = du$$

luego nuestro problema se reduce a:

$$\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} a du = a \int \frac{\sinh(v)}{\sqrt{\sinh^2(v)+1}} \cosh(v) dv$$

Finalmente recordamos que $1 + \sinh^2(v) = \cosh^2(v)$ y con esto:

$$\begin{aligned} a \int \frac{\sinh(v)}{\sqrt{\sinh^2(v)+1}} \cosh(v) dv &= a \int \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)} \cosh(v) dv \\ &= a \int \sinh(v) dv \\ &= a \cosh(v) + Cte \\ &= a\sqrt{1 + \sinh^2(v)} + Cte \end{aligned}$$

Como $\sinh(v) = u = \frac{x}{a}$ concluimos que:

$$\int \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}} dx = a\sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2} + Cte$$

que un correcto manejo algebraico permite reescribir:

$$\int \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{(\frac{x}{a})^2+1}} dx = \sqrt{a^2 + x^2} + Cte$$

ii. En este caso tenemos $\int \frac{1}{x \ln(x)(\ln^2(x)+1)} dx$ intentemos con el cambio de variables:

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

con esto nuestro problema se reduce a:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)(\ln^2(x)+1)} dx = \int \frac{1}{\ln(x)(\ln^2(x)+1)} \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u(u^2+1)} du$$

Ahora podemos proceder por fracciones parciales o sumando 0.

• **Alternativa 1:**

Por fracciones parciales nos queda:

$$\int \frac{1}{u(u^2+1)} du = \int \left(\frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1} \right) du$$

donde A, B, C satisfacen:

$$\begin{aligned} A(u^2+1) + (Bu+C)u &= 1 & A &= 1 \\ Au^2 + A + Bu^2 + Cu &= 1 & \Rightarrow B &= -1 \\ (A+B)u^2 + Cu + A &= 1 & C &= 0 \end{aligned}$$

luego se deduce que:

$$\int \frac{1}{u(u^2+1)} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1} \right) du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{u}{u^2+1} du = \ln(u) - \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + Cte$$

recordando el hecho que $u = \ln(x)$ se concluye:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)(\ln^2(x)+1)} dx = \ln(\ln(x)) - \frac{1}{2} \ln(\ln^2(x)+1) + Cte.$$

• **Alternativa 2:**

Sumando 0 en el numerador de la forma:

$$\int \frac{1}{u(u^2+1)} du = \int \frac{1+u^2}{u(u^2+1)} du - \int \frac{u^2}{u(u^2+1)} du = \int \frac{1}{u} du - \int \frac{u}{u^2+1} du$$

y se procede como lo hicimos antes.

iii. Para $\int e^x \sqrt{e^x+1} dx$ hacemos el cambio de variables:

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x dx$$

así:

$$\int e^x \sqrt{e^x+1} dx = \int \sqrt{e^x+1} e^x dx = \int \sqrt{u+1} du$$

Hacemos un segundo cambio de variables:

$$v = u+1 \quad \Rightarrow \quad du = dv$$

con esto $\int \sqrt{u+1} du = \int v^{\frac{1}{2}} dv = \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} + Cte$ y como $v = u+1 = e^x+1$:

$$\int e^x \sqrt{e^x+1} dx = \frac{2}{3} (e^x+1)^{\frac{3}{2}} + Cte$$

iv Tenemos que calcular $\int \frac{\sec(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sec(x)}} dx$, aunque hay muchos cambios de variables útiles, usaremos:

$$u = \sec(x) \quad \Rightarrow \quad du = \cos(x) dx$$

luego reduciendo términos:

$$\int \frac{\sec(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sec(x)}} dx = \int \frac{\sec(x)}{\sqrt{1+\sec(x)}} \cos(x) dx = \int \frac{u}{\sqrt{1+u}} du$$

ahora sumamos convenientemente 0 al numerador y se llega a:

$$\int \frac{u}{\sqrt{1+u}} du = \int \frac{1+u}{\sqrt{1+u}} du - \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = \int \sqrt{1+u} du - \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} du$$

y lo último es igual a $\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+u} + Cte$, como $u = \text{sen}(x)$ el resultado buscado era:

$$\int \frac{\text{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\text{sen}(x)}} dx = \frac{2}{3}(1+\text{sen}(x))^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\text{sen}(x)} + Cte$$

v. El cambio de variables más lógico para calcular $\int \ln(x)x^{-\frac{1}{2}} dx$ es:

$$u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

luego:

$$\int \ln(x)x^{-\frac{1}{2}} dx = \int \ln(x) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \ln(u^2) du = 2 \int \ln(u) du$$

Esa última primitiva¹ resulta ser $\int \ln(u) du = u \ln(u) - u + Cte$, con lo que concluimos:

$$\int \ln(x)x^{-\frac{1}{2}} dx = 2(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) - \sqrt{x}) + Cte$$

vi. Finalmente tenemos que calcular $\int x^3 \sqrt[3]{x^2+1} dx$, para ello:

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx$$

reescribimos la integral para hacer aparecer los términos anteriores:

$$\int x^3 \sqrt[3]{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int x^2 \sqrt[3]{x^2+1} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int (u-1) \sqrt[3]{u} du$$

pero si nos fijamos bien se tiene que

$$(u-1) \sqrt[3]{u} = (u-1)u^{\frac{1}{3}} = u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}}$$

luego $\int (u-1) \sqrt[3]{u} du = \int u^{\frac{4}{3}} du - \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + Cte$, y así:

$$\int x^3 \sqrt[3]{x^2+1} dx = \frac{3}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + Cte$$

¹Se verá después en la integración por partes

Pregunta 4.-

Recordemos las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+1\right)} = 2\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} \\ \cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

así estamos en condiciones de usar el cambio de variables:

$$\begin{aligned} u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad du &= \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \Rightarrow \quad 2 du = (1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)) dx \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} du = dx \\ &\Rightarrow 2 \frac{1}{1 + u^2} du = dx \end{aligned}$$

Con todo lo anterior podemos reescribir la integral y calcularla directamente:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} dx = \int \frac{1}{2\frac{u}{u^2+1}} 2 \frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{u^2+1}{u} \frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) + Cte^2$$

ahora, como $u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ se tiene que $\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} dx = \ln\left(\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + Cte$.

i. Usamos directamente los cálculos que ya hicimos:

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{2\frac{1-u^2}{1+u^2}} 2 \frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{1}{1-u^2} du = \int \frac{1}{(1-u)(1+u)} du$$

usando fracciones parciales:

$$\int \frac{1}{(1-u)(1+u)} du = \int \left(\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \right) du$$

donde A, B satisfacen:

$$\begin{aligned} A(1+u) + B(1-u) &= 1 & A &= B \\ A + Bu + B - Bu &= 1 & \Rightarrow B &= \frac{1}{2} \\ (A - B)u + (A + B) &= 1 & A &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego deducimos que:

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du = \frac{1}{2} (-\ln|1-u| + \ln|1+u|) + Cte$$

lo cual implica que $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \frac{1}{2} (-\ln|1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)| + \ln|1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)|) + Cte$.

ii. En este caso:

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} dx = \int \frac{1}{1+2\frac{u}{u^2+1}} 2 \frac{1}{1+u^2} du = 2 \int \frac{u^2+1}{u^2+1+2u} \frac{1}{1+u^2} du = 2 \int \frac{1}{(1+u)^2} du$$

es claro que $\int \frac{2}{(1+u)^2} du = -\frac{2}{1+u} + Cte$ y recordando la definición de u el resultado es:

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} dx = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} + Cte$$

²El módulo está explícito pues debemos asegurarnos de que el argumento del logaritmo sea positivo.

iii. Como $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, si multiplicamos por 1 el denominador se tiene:

$$\begin{aligned}\sin(x) + \cos(x) &= \sqrt{2}(\sin(x)\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos(x)\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= \sqrt{2}(\sin(x)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(x)\sin(\frac{\pi}{4})) \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

y con esto podemos reescribir términos para concluir que:

$$\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} dx \stackrel{(i)}{=} \ln(|\tan(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8})|) + Cte$$

Pregunta 5.-

La integración por partes es una consecuencia de la regla del producto para derivadas, puede resumirse en la fórmula:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

donde basta reconocer correctamente u y dv para aplicar la formula.

i. Nos piden calcular $\int x e^x \, dx$, si usamos:

$$\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x \, dx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array}$$

luego aplicando la fórmula inicial:

$$\int x e^x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x e^x - \int e^x \, dx$$

como $\int e^x \, dx = e^x + Cte$, se concluye que:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - e^x + Cte$$

ii. En este caso tenemos que encontrar $\int x^2 e^x \, dx$, procediendo de la misma forma que en (i):

$$\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x \, dx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = 2x \, dx \\ v = e^x \end{array}$$

luego aplicando la fórmula inicial:

$$\int x^2 e^x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

pero ya calculamos esta primitiva, con lo cual:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + Cte$$

iii. Parece un tanto extraño que nos pidan calcular por partes la primitiva de $\arctg(x)$ dado que no es claro que hay una multiplicación de funciones, pero basta recordar que $\int \arctg(x) \, dx = \int 1 \cdot \arctg(x) \, dx$ con lo cual podemos reconocer términos:

$$\begin{array}{l} u = \arctg(x) \\ dv = dx \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ v = x \end{array}$$

y así:

$$\int \arctg(x) \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \cdot \arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

y esa última primitiva es $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + Cte$. Finalmente:

$$\int \arctg(x) \, dx = x \cdot \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + Cte$$

iv. Idéntico a (iii.):

$$\begin{aligned} u = \ln(x) & \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{aligned}$$

y así:

$$\int \ln(x) dx = \int u dv = uv - \int v du = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot \ln(x) - x$$

v. Buscamos una función que derivada nos de $e^{-\sqrt{x}}$, primero hacemos el cambio de variables:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{x} & \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ & \Rightarrow 2\sqrt{x} dy = dx \\ & \Rightarrow 2y dy = dx \end{aligned}$$

luego $\int e^{-\sqrt{x}} dx = 2 \int ye^{-y} dy$ y ahora procedemos por partes:

$$\begin{aligned} u = y & \Rightarrow du = dy \\ dv = e^{-y} dy & \Rightarrow v = -e^{-y} \end{aligned}$$

con lo que:

$$2 \int ye^{-y} dy = 2 \int u dv = 2uv - 2 \int v du = -2ye^{-y} + 2 \int e^{-y} dy = 2ye^{-y} - 2e^{-y} + Cte$$

que es equivalente a:

$$\int e^{-\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + Cte$$

vi. Nos está faltando calcular $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$, usaremos los siguientes u y dv :

$$\begin{aligned} u = xe^x & \Rightarrow du = (e^x + xe^x) dx \\ dv = \frac{1}{(1+x)^2} dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int xe^x \frac{1}{(1+x)^2} dx = -xe^x \frac{1}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} (e^x + xe^x) dx = -xe^x \frac{1}{1+x} + \int e^x dx$$

llegamos a:

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + Cte$$

Pregunta 6.-

Calculemos I_0 , I_1 , I_2 e I_3 y con ello podremos ver la fórmula general:

1. La integral se reduce a:

$$I_0 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) + Cte$$

2. En este caso:

$$I_1 = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + Cte$$

3. Utilizaremos el hecho que ya calculamos I_0 :

$$I_2 = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int dx - I_0 = x - I_0$$

4. Nuevamente sumamos 0 y luego:

$$I_3 = \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \frac{x+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \int x dx - I_0 = \frac{x^2}{2} - I_0$$

Con estos simples cálculos podemos generalizar para un $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{x^n}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{x^{n-2}+x^n}{1+x^2} dx - \int \frac{x^{n-2}}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{1+x^2} dx - I_{n-2} \\ &= \int x^{n-2} dx - I_{n-2} \\ &= \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} \end{aligned}$$

Pregunta 7.-

Tenemos la siguiente primitiva en función de n :

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$$

para ello basta que hagamos una iteración de la integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= x^n \\ dv &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} du &= nx^{n-1} dx \\ v &= 2\sqrt{1+x} \end{aligned} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx = 2x^n\sqrt{1+x} - 2n \int \sqrt{1+x} x^{n-1} dx$$

ahora la integral de la derecha la multiplicamos por $\frac{1+x}{1+x}$, con esto:

$$\int \sqrt{1+x} x^{n-1} \frac{1+x}{1+x} dx = \int x^{n-1} \frac{1+x}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}} dx + \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx = I_{n-1} + I_n$$

y así lo anterior se reduce a:

$$I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2n(I_{n-1} + I_n)$$

que es equivalente a $(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2n \cdot I_{n-1}$ que es lo que queríamos probar.