MA1A2-2 Cálculo Diferencial e Integral. Semestre 2008-01
Profesor: Raúl Uribe **Auxiliares:** Cristóbal Quiñinao - Felipe Ruiz

Clase Auxiliar

14 de Mayo de 2008

En la presente clase auxiliar trabajaremos en las aplicaciones de la Integral de Riemann primero recordemos un par de fórmulas:

- El área bajo la curva de una función
$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$
viene dada por la expresión
$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx$$
Una forma "simbólica" de entender lo anterior es asumir que $A = \int dA(x)$ y por definición de área de un sector rectangular sigue que $dA(x) = f(x) \, dx$

- Una segunda aplicación directa de la Integral de Riemann es el cálculo de Volúmenes generados por la rotación de un área respecto de alguno de los ejes cartesianos.
  - Si la Rotación es en torno del eje OY entonces
$$V_{OY} = \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx$$
  - Si en cambio la rotación es en torno al eje OX sigue
$$V_{OX} = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$$

- También es posible calcular el largo de una curva que viene dada por alguna relación entre coordenadas cartesianas, esto es
$$L_{ab} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

- Una última aplicación que usaremos hoy es el cálculo de Áreas de Sólidos de Revolución, esto es, dada una función definida en un intervalo $[a, b]$, el área de la superficie que se genera al rotar la función en torno al eje OX es
$$A_R = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Pregunta 1.-

Calcule en área encerrada por los siguientes pares de funciones:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{1-x^2} \\ g_1(x) &= \sqrt{3}-\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^2/3 \\ g_2(x) &= 4-2x^2/3 \end{aligned}$$

Pregunta 2.-

Calcule el área de una elipse centrada en el origen y de semiejes a, b (con $a > b$). Para ello note que por la simetría de la figura basta calcular el área del sector que está inmerso en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Pregunta 3.-

Considere un sector circular de amplitud θ de una circunferencia de radio r centrada en el punto $(a, 0)$ $(a > r > 0)$.

- Calcule el volúmen del sólido generado al rotar el sector circular antes mencionado en torno al eje OY.
- Si se considera $\theta = 2\pi$ entonces la figura anterior recibe el nombre de toroide. Deduzca el valor del volúmen de aquella figura geométrica.

Pregunta 4.-

Calcular el área del lazo de curva $9ay^2 = x(3a-x)^2$.

Pregunta 5.-

Para $\alpha \in (0, 1)$, denotamos por R la región encerrada por la curva x^α, el eje OY y la recta tangente a x^α en el punto $x = 1$.

- Demostrar que el área de la región R está dada por $A = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$.
- Demostrar que el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región R en torno al eje OY está dado por $V = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$.
- En el caso $\alpha = \frac{2}{3}$ calcule el perímetro de la región R.

Pregunta 6.-

La región limitada por las curvas $y = \sin(x)$, $y = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$, se hace rotar en torno del eje OY. Calcular el volumen del sólido así generado.

Pregunta 7.-

Calcule la siguiente integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 e^{-x^2}\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$$

Ahora note que no necesariamente la función está correctamente definida en el intervalo considerado, además note que el área no es nula ¿porqué cree usted que sucede esto sin contradecir la Integrabilidad de Riemann de la función?