# Cálculo Diferencial e Integral
# Continuidad Uniforme

Profesor: Raúl Uribe

26 de marzo de 2008

## 1. Definiciones

Partiremos el presente resumen de las propiedades de las funciones uniformemente continuas recordando un par de definiciones:

- Se dirá que una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ ssi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in A \ \wedge \ |x - x_0| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

Es importante notar que esta definición de continuidad está ligada a solo un punto del intervalo, si queremos extender esta noción lo natural sería anteponer un cuantificador, esto es:

- Se dirá que una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $A$ ssi:

$$(\forall x \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(y \in A \ \wedge \ |x - y| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Sin perder generalidad podemos suponer que $A$ es una unión de intervalos, los cuales (para que la definición anterior tenga sentido) suponemos de la forma $(a_i, b_i)$, esto es, suponemos $A$ de la forma

$$A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$$

donde $I$ es un conjunto numerable (ejemplos de ellos son $\mathbb{N}$, o cualquier conjunto finito).

Es de total trascendencia hacer este supuesto pues en el caso de un intervalo cerrado o semicerrado, ie, $[a, b]$, $[a, b)$ o $(a, b]$, la continuidad en los extremos se define mediante los límites laterales, esto es:

- Se dirá que $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$ ssi $f$ es continua en $(a, b)$ y si además los siguientes límites existen y son iguales a la función evaluada en los extremos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ \wedge \ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

- Se dirá que $f$ es continua en $[a, b)$ ssi es continua en $(a, b)$ y si el siguiente límite existe y es igual a la función evaluada en el extremo:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

- Se dirá que $f$ es continua en $(a, b]$ ssi es continua en $(a, b)$ y si el siguiente límite existe y es igual a la función evaluada en el extremo:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

No es del todo necesario aprender de memoria todas estas definiciones, sino más bien entenderlas. El hecho trascendente es que una función continua en un intervalo abierto es continua en cada uno de sus puntos; mientras que en un intervalo cerrado se exige además de la continuidad en el interior, que los límites laterales existan.

El último tipo de continuidad que debe ser manejado es la llamada continuidad uniforme, esta quiere decir que en la elección del $\delta$ no nos interesa en qué punto del intervalo estemos haciendo el análisis.

- Diremos que la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua ssi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Es importante notar que hay un cambio en el orden de los cuantificadores respecto de la definición de continuidad en un intervalo, mientras que antes el $x$ de la continuidad aparece antes del $\delta$ ahora no es así. La razón viene dada porque en la continuidad uniforme el $\delta$ NO DEPENDE del $x$ en cuestión.

# 2. Problemas

1. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua (en adelante denotaremos esto por CU).

   Supongamos, para llegar a una contradicción, que $f(x) = x^2$ es una función CU, entonces:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \mathbb{R})|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

   en particular para $\epsilon = 1$ se asegura la existencia de un $\delta_1$ tal que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})|x - y| \leq \delta_1 \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \epsilon = 1$$

   Consideremos $x = \frac{1}{\delta_1}$ e $y = x + \frac{\delta_1}{2}$ entonces se tiene que $|x - y| = |x - (x + \frac{\delta_1}{2})| = \frac{\delta_1}{2} \leq \delta_1$ pero

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x^2 - (x + \frac{\delta_1}{2})^2| \\
&= |x^2 - (x^2 + x\delta_1 + \frac{\delta_1^2}{4})| \\
&= |-x\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{4}| \\
&= |x\delta_1 + \frac{\delta_1^2}{4}| \\
&= |\frac{1}{\delta_1}\delta_1 + \frac{\delta_1^2}{4}| \\
&= 1 + \frac{\delta_1^2}{4} \\
&> 1
\end{aligned}$$

   lo cual es evidentemente una contradicción.

2. Demostrar que una función continua $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $A$ un intervalo cerrado y acotado, es uniformemente acotada.

   Supongamos por contradicción que la función no es uniformemente continua, esto es, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ podemos encontrar puntos $x, y \in A$ tales que $|x - y| \leq \delta$ pero $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Tomemos la sucesión $\delta_n = \frac{1}{n}$ se sigue que existen $x_n, y_n \in A$ tales que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \ \wedge \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

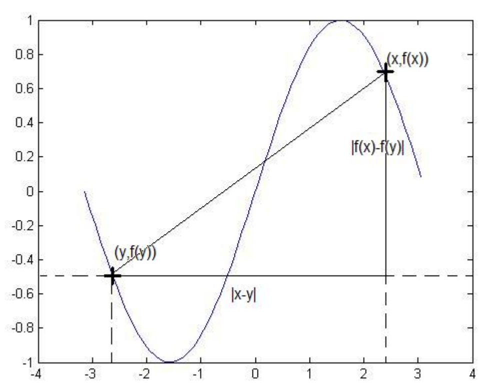
   Ahora como $A$ es cerrado y acotado podemos extraer una subsucesión convergente $x_{n_k} \to x_0$ pero por la desigualdad triangular se concluye que $y_{n_k} \to x_0$. Con esto usando la continuidad se tiene que

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

   lo cual es una contradicción con el hecho que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)$ es UC.

   El argumento formal para lo que sigue se verá en un par de semanas más; por ahora veamos un poco de geometría, consideremos la función $\sin(x)$ entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ (sin perder generalidad $x > y$), se tendrá:




   ahora es claro que

$$|\sin(x) - \sin(y)| = \frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x - y|}|x - y|$$

   y además $\frac{|\sin(x)-\sin(y)|}{|x-y|}$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(y, \sin(y))$ y $(x, \sin(x))$. Notemos que esta pendiente la podemos acotar superiormente:

   - El numerador es menor que 2 pues

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |\max_{x \in \mathbb{R}} \sin(x) - \min_{y \in \mathbb{R}} \sin(y)| = 2$$

- Si hacemos el denominador pequeño (esto para hacer crecer la expresión) en el límite se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to y}\frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(y+h)-\sin(y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(y)\cos(h)+\cos(y)\sin(h)-\sin(y)}{h}\\
&= \sin(y)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\to 0}+\cos(y)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1}\\
&= \cos(y)\\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Sea $C$ una cota superior para la pendiente de la curva secante anteriormente discutida, se concluye que

$$|\sin(x)-\sin(y)|\leq C|x-y|$$

luego sea $\epsilon>0$ basta tomar $\delta=\frac{\epsilon}{C}$ y con ello

$$|x-y|\leq\delta\Rightarrow|\sin(x)-\sin(y)|\leq C|x-y|\leq C\delta\leq\epsilon$$

como el $\delta$ encontrado solo depende de $\epsilon$ se tiene sigue que la función $\sin(x)$ es efectivamente CU.