Examen, MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (3 de Julio)

Instrucciones: *Este examen consta de 7 preguntas de diferente puntaje cada una. La nota del examen se calcula mediante la fórmula* $N_{ex} = \frac{P}{3} + 1{,}0$, *donde* P *es el puntaje obtenido.*

P.1.- (*1.5 ptos.*) Si se sabe que $a_n(n^3 - n + 1)$ converge a 1, determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum n a_n x^n$.

Solución

Usamos el criterio de la raíz enésima:

$$\sqrt[n]{n|a_n||x|^n} = |x| \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^3 - n + 1}} \sqrt[n]{|a_n(n^3 - n + 1)|} \to |x|$$

Por lo tanto el rado de convergencia es 1 .... 1.0 pto.

En $|x| = 1$ la serie de los módulos es: $\sum n a_n = \sum \frac{n}{n^3-n+1} a_n(n^3-n+1)$ que se compara con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. Por lo tanto la serie converge absolutamente en los extremos. 0.5 pto.

P.2.- (*3 ptos.*) Calcular

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{\cos(\pi x/2)} - 1}{x^2 - 1}$

Solución

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{\cos(\pi x/2)} - 1}{x^2 - 1} \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{\cos(\pi x/2)}(-\operatorname{sen}(\pi x/2))\pi/2}{2x} = -\frac{\pi/2}{2} = -\frac{\pi}{4}$$ .... 1.0 pto.

b) $\int e^{1/x}(2x - 1)$

Solución

Integramos por partes el primer sumando: $u = e^{1/x} \quad \to \quad du = e^{1/x}(-\frac{1}{x^2})$
$dv = 2x \quad \to \quad v = x^2$

Queda: $\int e^{1/x}(2x - 1) = e^{1/x}x^2 + \int e^{1/x} - \int e^{1/x} = e^{1/x}x^2 + C$ .... 1.0 pto.

c) $\displaystyle\int x \arctan(x)$.

Solución

Integramos por partes $u = \arctan(x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}$
$dv = x \quad \rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$

Queda:

$$\int x \arctan(x) = \arctan(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}$$

.... 0.5 pto.

Ordenando resulta

$$= \arctan(x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2}) = \arctan(x)\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

.... 0.5 pto.

P.3.- (*1.5 ptos.*) Si f es una función continua y convexa en $[a, b]$ ($a < b$), demuestre que

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$$

Solución

hacemos el cambio de variable $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, con $dx = (a - b)d\lambda$. Queda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^0 f(\lambda a + (1 - \lambda)b)(a - b)d\lambda$$

.... 0.5 pto.

Como f es convexa:

$$\leq (b - a)\int_0^1 (\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b))d\lambda = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

.... 1.0 pto.

P.4.- (*3 ptos.*) Sea $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

- Determine crecimiento, mínimos, máximos, puntos de inflexión, convexidad, concavidad de f, y asíntotas de f''.

Solución

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$. Luego f crece en $(-\infty, -1]$ y en $[\frac{1}{3}, \infty)$ y decrece en $[-1, \frac{1}{3}]$. Tiene máximo local en -1 y mínimo local en $\frac{1}{3}$. .... 0.5 pto.
$x''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1)$. Por lo tanto f es convexa en $[-\frac{1}{3}, \infty)$ y concava en $(-\infty, -\frac{1}{3}]$.
.... 0.5 pto.
Al ser f'' una recta, sus asíntotas son oblicuas e iguales a ella misma. .... 0.5 pto.

- Analice la convergencia de las siguientes integrales: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f''(x)}{x\sqrt{x}}dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(x)}{x\sqrt{x}}dx$.

Solución

$$\frac{f''(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{6x+2}{x\sqrt{x}} = \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^{3/2}}$$

.... 0.5 pto.

La primera integral es igual a la suma de

$$\int_1^\infty \frac{6}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}$$

Como la primera diverge y la segunda converge, la suma diverge. .... 0.5 pto.

La segunda integral es igual a la suma de

$$\int_0^1 \frac{6}{\sqrt{x}} + \int_0^1 \frac{2}{x^{3/2}}$$

Como la primera converge y la segunda diverge, la suma diverge. .... 0.5 pto.

P.5.- (*3 ptos.*) Determine una serie de potencias para f si se sabe que $xf'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Solución

La ecuación dada se escribe

$$(xf(x))' = \sum_{n=0}^\infty x^n$$

.... 1.0 pto.

por lo tanto, integrando se obtiene

$$xf(x) = C + \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

.... 1.0 pto.

Evaluando en $x = 0$ resulta $C = 0$ .... 0.5 pto.

Despejando se concluye que

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots$$

.... 0.5 pto.

P.6.- (*3 ptos.*) Determine los vectores tangente y normal de la curva

$$\vec{r}(t) = \left(\ t^2 \ , \ t + \frac{t^3}{3} \ , \ t - \frac{t^3}{3} \ \right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Solución

Derivando se obtiene

$$\vec{r}'(t) = \Big(\ 2t \ , \ 1 + t^2 \ , \ 1 - t^2 \ \Big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

.... $\boxed{\text{0.5 pto.}}$

Por lo tanto $s'(t) = \sqrt{4t^2 + 2 + 2t^4} = \sqrt{2}(t^2+1)$ .... $\boxed{\text{0.5 pto.}}$

Con esto, el vector tangente es

$$T(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{s'(t)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ \frac{2t}{t^2+1} \ , \ 1 \ , \ \frac{1-t^2}{1+t^2} \ \right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

.... $\boxed{\text{0.5 pto.}}$

Derivando nuevamente

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ \frac{2(t^2+1) - 2t(2t)}{(t^2+1)^2} \ , \ 0 \ , \ \frac{(-2t)(1+t^2) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} \ \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}\Big(\ 1 - t^2 \ , \ 0 \ , \ -2t \ \Big) \end{aligned}$$

.... $\boxed{\text{1.0 pto.}}$

Dividiendo por la norma se obtiene que

$$N(t) = \frac{1}{1+t^2}\Big(\ 1 - t^2 \ , \ 0 \ , \ -2t \ \Big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

.... $\boxed{\text{0.5 pto.}}$

P.7.- (*3 ptos.*) Determinar el centro de gravedad de la región que la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ encierra en el primer cuadrante.

Solución

En el primer cuadrante, el área A de la región vale $\frac{1}{4}\pi ab$ (se puede calcular la integral) . 1.0 pto.

Además:

$$\int_0^a xf(x) = \frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2} = \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ba^2}{3}$$

.... 1.0 pto.

Por lo tanto obtenemos que

$$x_G = \frac{ba^2/3}{\pi ab/4} = \frac{4}{3\pi}a$$

.... 0.5 pto.

Análogamente (intercambiando los roles de a y b, se obtiene que

$$y_G = \frac{4}{3\pi}b$$

.... 0.5 pto.