Control 3, MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (27 de Junio)

P.1.- **a)** (*3 ptos.*) Considere la curva definida por la ecuación

$$\vec{r}(t) = \Big(\ t \operatorname{sen} t\ ,\ t\cos t\ ,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\ \Big) \qquad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Calcule el largo L y la masa M de la curva, sabiendo que su densidad está dada por la ecuación $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solución

Derivando se tiene que:

$$\vec{r}\,'(t) = \Big(\ \operatorname{sen} t + t\cos t\ ,\ \cos t - t\operatorname{sen} t\ ,\ \sqrt{2t}\ \Big) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

.... 0.5 ptos.

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} s'(t) = \|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{(\operatorname{sen} t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\operatorname{sen} t)^2 + 2t} \\ &= \sqrt{1 + t^2 + 2t} = 1 + t \qquad \forall t \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

.... 0.5 ptos.

El largo de la curva es

$$L = \int_0^{2\pi} s'(t)dt = \int_0^{2\pi} (1+t)dt = 2\pi + 2\pi^2$$

.... 1.0 pto.

La masa de la curva es

$$\begin{aligned} M = \int_0^{2\pi} \rho(\vec{r}(t))s'(t)dt &= \int_0^{2\pi} \Big\{(t\operatorname{sen} t)^2 + (t\cos t)^2\Big\}(1+t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} t^2(1+t)dt = \frac{8\pi^3}{3} + 4\pi^4 \end{aligned}$$

.... 1.0 pto.

b) (*3 ptos.*) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable, demuestre que la curvatura κ de la curva

$$\vec{r}(t) = \Big(\ \cos t\ ,\ \operatorname{sen} t\ ,\ f(t)\ \Big) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

está dada por la ecuación

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{1 + f'(t)^2 + f''(t)^2}}{\big(1 + f'(t)^2\big)^{3/2}}$$

Solución

Derivando se tiene que:

$$\vec{r}'(t) = \Big(\; -\operatorname{sen} t \; , \; \cos t \; , \; f'(t) \; \Big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

. . . . 0.3 ptos.

Por lo tanto tenemos que

$$s'(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + f'^2(t)} = \sqrt{1 + f'^2(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

. . . . 0.2 ptos.

La curvatura está dada por la ecuación

$$\kappa(t) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|$$

donde

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T'(t)}{s'(t)} = \frac{1}{s'(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}'(t)}{s'(t)} \right) = \frac{1}{s'^3(t)} \Big(\vec{r}''(t) s'(t) - \vec{r}'(t) s''(t) \Big)$$

. . . . 0.5 pto.

Derivando nuevamente se tiene que

$$\vec{r}''(t) = \Big(\; -\cos t \; , \; -\operatorname{sen} t \; , \; f''(t) \; \Big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

. . . . 0.5 ptos.

y que

$$s''(t) = \frac{1}{2\sqrt{1 + f'^2(t)}} \cdot 2 f'(t) f''(t) = \frac{f'(t) f''(t)}{s'(t)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

. . . . 0.5 ptos.

Por lo tanto

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{s'^4(t)} \Big(\vec{r}''(t) s'^2(t) - \vec{r}'(t) s''(t) s`(t) \Big)$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{s'^4(t)} \Big(\quad & -\cos t - f'^2(t) \cos t + f'(t) f''(t) \operatorname{sen}(t) \; , \\ & -\operatorname{sen} t - f'^2(t) \operatorname{sen} t - f'(t) f''(t) \cos(t) \; , \; f''(t) \; \Big) \end{aligned}$$

. . . . 0.5 pto.

Tomando la norma se obtiene que

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{1}{s'^4(t)} \sqrt{1 + f'^4(t) + f'^2(t) f''^2(t) + 2f'^2 + f''^2(t)} \\ &= \frac{1}{s'^4(t)} \sqrt{(1 + f'^2(t))^2 + (1 + f'^2(t)) f''^2(t)} \\ &= \frac{1}{s'^3(t)} \sqrt{1 + f'^2(t) + f''^2(t)} \end{aligned}$$

. . . . 0.5 pto.

P.2.- Determine si las siguientes integrales impropias, son o no convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$

Solución

(a) Usando la definición tenemos que

$$\int_0^1 \ln(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x - x\right)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0} -1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon = -1$$

Luego es convergente .... 2.0 pto.

(b) Usando comparación, cómo $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, existe x_0 tal que

$$0 \le \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^x \le \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$$

.... 1.0 pto.

Usando que la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}$ es convergente se concluye que la pedida también lo es .... 1.0 pto.

(c) Debemos estudiar la convergencia de las siguientes dos integrales impropias:

$$\int_0^a \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})} \qquad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(x+\sqrt{x})}$$

para algún $a > 0$ (por ejemplo $a = 1$) .... 1.0 pto.

La primera es comparable con la integral $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x\sqrt{x}}$. En efecto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}}{x(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = 1.$$

Pero como esta es divergente ($\frac{3}{2} > 1$) se deduce que la pedida también lo es y por lo tanto no es necesario analizar la integral hacia $+\infty$. .... 1.0 pto.

P.3.- Estudie la convergencia (absoluta y condicional) de las siguientes series

(a) $\sum \cos(k\pi)\,\mathrm{sen}(1/k)$ **(b)** $\sum \frac{2^k\; k!}{k^k}$ **(c)** $\sum k^2\Big(k^2\big(\cos(1/k)-1\big)\Big)^k$

Solución

(a) Notemos que $\cos(k\pi) = (-1)^k$ por lo tanto estamos en presencia de una serie de términos alternantes. Como $1/k$ decrece y $\mathrm{sen}(\cot)$ es una función creciente en $[0,1]$, se deduce que $\mathrm{sen}(1/k)$ es decreciente. Por lo tanto, usando el criterio de Leibnitz se deduce que la serie converge. .... 1.0 pto.

La serie de los módulos es $\sum \mathrm{sen}(1/k)$ la cual diverge ya que es comparable a la serie armónica $\sum(1/k)$. Por lo tanto la convergencia de la serie pedida, es sólo condicional. .. 1.0 pto.

(b) Usemos el criterio del cuociente:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}\;(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{2^k\; k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{(k+1)^k} \cdot \frac{k^k}{1} = \frac{2}{e} < 1$$

Cómo el límite es menor que 1, la serie converge. .... 2.0 pto.

(c) Usemos criterio de la raíz k-ésima a la serie de los módulos.

$$\lim_{k\to\infty} (\sqrt[k]{k})^2 \left|\frac{\cos(1/k)-1}{(1/k)^2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Luego la serie converge absolutamente. .... 2.0 pto.