Series de Potencia

Se llama serie de potencia a una serie de la forma:

$\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ donde: $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes.

Teo 1)

i) Si la serie $\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ converge para algún $x = x_0$, entonces converge absolutamente $\forall |x| < |x_0|$, es decir, $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$

ii) Si la serie $\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ diverge para algún $x = x_0$, entonces diverge $\forall |x| > |x_0|$, es decir, $\forall x \in (-\infty, -|x_0|) \cup (|x_0|, \infty)$

Estudio general de la convergencia de $\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

i) Claramente converge para $x = 0$. (converge a a_0)

ii) Para el caso $x \neq 0$ se usará como ejemplo el criterio de la raíz:

ii.1) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x| \cdot \infty \to \infty$

$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ **diverge** $\forall x \neq 0$

ii.2) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x| \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ **converge** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** por lo que el radio de convergencia es infinito.

ii.3) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to c \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x| \cdot c$

$\therefore$ Para que la serie converja es necesario que $|x| \cdot c < 1$**.**

$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ **converge** $\forall |x| < \frac{1}{c}$ y **diverge** $\forall |x| > \frac{1}{c}$

Se le llama a $R = \frac{1}{c}$ **radio de convergencia de la serie de potencia.**

Con respecto a los límites del intervalo de convergencia ($-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}$ **)=**(-R, R) **no se puede decir nada por lo que se tienen que analizar por separado.**

Cabe mencionar que el análisis anterior es utilizando el método del cuociente, pero se puede llegar a los mismos resultado utilizando el método de la raíz enésima.

Un problema de ejemplo.

P1) Determine el intervalo de convergencia para la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^{n}$$

Sol) Utilizando el método del cuociente: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}}{\frac{1}{n} \cdot x^{n}} \right| = 1 \cdot |x|$

Para que esta serie converja: $1 \cdot |x| < 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$.

Como no se puede decir nada de los límites del intervalo, se analizan por separado:

Para x=1 La serie queda: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **la cual es conocidamente divergente.**

Para x=-1 La serie queda: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n}$ **.** Para analizar esta serie se utiliza el criterio de Leibnitz, para el cual se deben demostrar sus hipótesis:

i) $a_n = \frac{1}{n}$ decreciente: claramente es decreciente, es cosa de derivar o decir que es el inverso de la función creciente $f(n) = n$.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0$ por lo que se cumple.

La serie es convergente por Leibnitz para x=-1, aunque es condionalmente convergente, ya que al tomar módulo queda la serie armónica que diverge.

$$\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

El intervalo de convergencia es [-1,1), aunque en -1 es condicionalmente convergente.

Este problema es de los fáciles, ejerciten en los controles de años anteriores que hay algunos de estos en los exámenes.

Saludos
Felipe Ruiz A