MA1A2-2 Cálculo Diferencial e Integral. Semestre 2008-01
Profesor: Raúl Uribe **Auxiliares:** Cristóbal Quiñinao - Felipe Ruiz

Clase Auxiliar

4 de Junio de 2008

Comenzamos con el tema de parametrizaciones, como preámbulo debemos recordar distintos sistemas de coordenadas, y más aún entender que significan y cuales son sus utilidades.

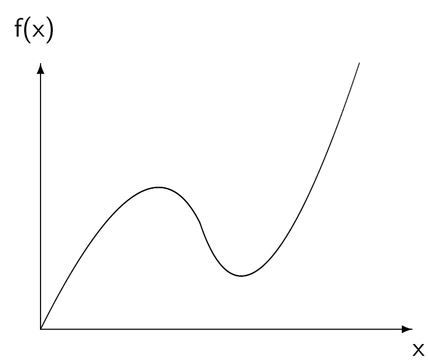
En lo que sigue ya no trabajaremos en el plano cartesiano (que es donde viven las funciones reales de una variable real). Antes de introducir el concepto de espacio recordemos, como ejemplo, las coordenadas cartesianas y su equivalencia con las coordenadas polares:

1. Representaciones del Plano

Recordemos que una función real de variable real la definíamos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

si se nos pedía graficar la función hacíamos lo siguiente:



donde cada punto (x, y) del plano significaba el par $(x, f(x))$.

Por extraño que parezca, lo anterior no es más que una parametrización de una curva plana, y el par de ejes sobre el cual estamos haciendo el gráfico recibe el nombre de Sistema de Coordenadas Cartesiano. Pero, ¿cómo debemos interpretar un Sistema de Coordenadas?, la respuesta viene dada por la siguiente observación:

Observación 1.- Identificamos $\mathbb{R}^2$ como el subconjunto dado por los pares ordenados (x, y) donde $x, y \in \mathbb{R}$. Dado un punto cualquiera de un plano lo identificaremos con un único punto de $\mathbb{R}^2$ fijando un origen y dos direcciones canónicas x e y.

De lo anterior debemos retener en mente que para fijar un punto necesitaremos dos números, los cuales a posteriori llamaremos coordenadas.

Si ahora, nos interesa la distancia al origen de los puntos ¿cuales serán los coordenadas naturales?. La semana pasada se respondió esta pregunta mediante la definición de coordenadas polares:

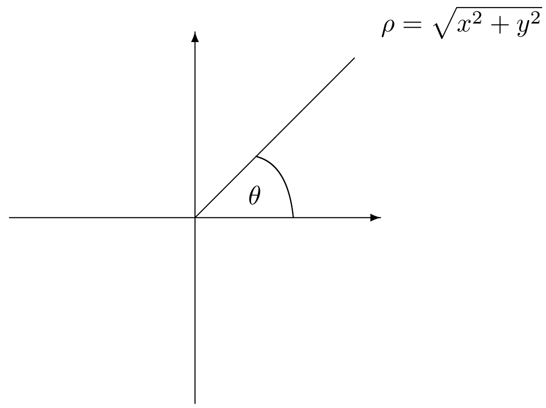
Definición.- La función definida por

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & [0,+\infty)\times[0,2\pi) \\ & (x,y) & \longmapsto & \Phi(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)) \end{array}$$

es una biyección y por consecuencia si definimos los parámetros

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad \theta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

bastan para definir inequívocamente cualquier punto del plano cartesiano.



Representaciones del Espacio

Si en el plano necesitabamos 2 números para determinar inequívocamente un punto, en el espacio necesitaremos una coordenada más para determinar la altura del plano donde estamos trabajando. De lo anterior haremos la misma identificación del espacio con las tuplas $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y necesitaremos, por ende, un origen y tres ejes pricipales.

Las coordenadas polares pueden ser extendidas a $\mathbb{R}^3$ agregando también una variable altura y entonces nos queda el trío de coordenadas:

$$(\rho,\theta,z)=(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arc\,tg}(y/x), z)$$

Finalmente unas coordenadas un poco menos intuitivas son las coordenadas esféricas las cuales estudiaremos en la siguiente clase auxiliar.[1] Resolvamos a continuación la Guía de Ejercicios destinada a la Semana 11 y un par de problemas Genéricos.

[1] Para ver definiciones ver http://www.dim.uchile.cl/ ∼docencia/calculo_dif/material/presentacion_ semana/presenta_ sem11_ calcdiff.pdf

Ejercicios

1. Encuentre una parametrización de la frontera del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

   Solución.- Primero debemos recordar que una parametrización es una función que transforma un subconjunto del tipo $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ en la curva del plano (o espacio) particular, esto es buscamos:

$$\begin{array}{rlcl} \phi: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t)) \end{array}$$

   ahora no se asusten por encontrar una única expresión que englobe la curva que buscan, de hecho hay múltiples casos donde es mucho más fácil encontrar una expresion definida por tramos (lo cual haremos en el presente ejercicio).

   Por simplicidad consideremos el intervalo $[0,8)$ como un trozo de alambre, luego lo que pretendemos es doblarlo cada dos unidades en ángulos rectos para obtener el borde del cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$. Recorramos el cuadrado partiendo del vértice $(1,-1)$ y luego visitando $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ para finalmente volver al punto de partida.

   Para ser consistentes, imponemos que

$$\phi(0)=(1,-1)$$

   luego si hacemos avanzar el parámetro t desde $t=0$ hasta $t=2$, entonces, la coordenada x se mantiene constante, mientras que y solo aumentará hasta el valor $y(2)=1$. Notemos que la siguiente expresión hace lo que pretendemos:

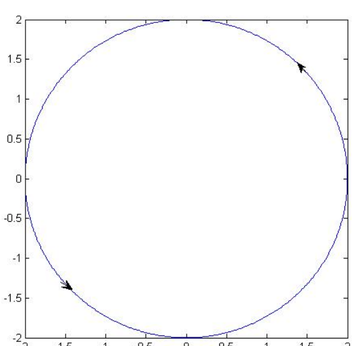
$$\begin{array}{rlcl} \phi: & [0,2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (1,-1+t) \end{array}$$

   Argumentos similares nos dan la siguiente parametrización:

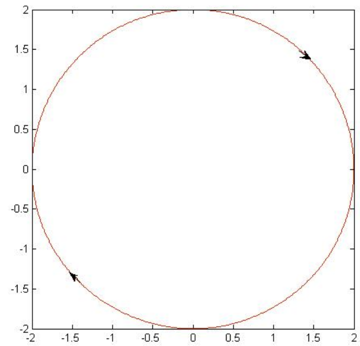
$$\phi(t)=\begin{cases} (1,-1+t) & \text{si} \quad t\in[0,2) \\ (3-t,1) & \text{si} \quad t\in[2,4) \\ (-1,5-t) & \text{si} \quad t\in[4,6) \\ (-7+t,-1) & \text{si} \quad t\in[6,8) \end{cases}$$

2. Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente

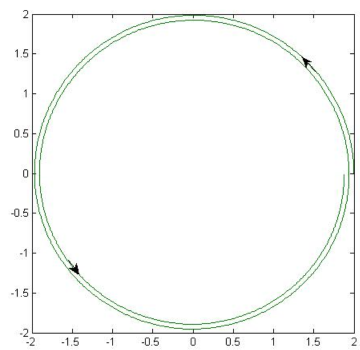
   a) $x(t)=(r\cos(t),r\sin(t))$, $t\in[0,2\pi)$



b) $x(t) = (r\cos(t), -r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$



c) $x(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 4\pi)$



3. Determinar la parametrización de la curva plana tal que el producto de las distancias a dos focos en la abscisa es constante (esta curva se llama Lemmniscata)

   Solución.- Sean $f_1 = (a, 0)$ y $f_2 = (-a, 0)$ los focos de la Lemniscata[2] y sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto de ella. Escribamos la distancia de (x, y) a los focos:

$$d_{f_1}^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad d_{f_2}^2 = (x+a)^2 + y^2$$

   notemos que si el producto es constante, del hecho que las distancias son no negativas, es equivalente a decir que el cuadrado de los productos es constante. Reescribiendo lo anterior llegamos a la expresión:

$$\begin{aligned} d_{f_1}^2 \cdot d_{f_2}^2 &= ((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2) \\ &= (x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) \\ &= (x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 + a^4 + 2a^2(x^2 + y^2) - 4a^2x^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 + a^4 + 2a^2x^2 + 2a^2y^2 - 4a^2x^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 + a^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 \end{aligned}$$

[2]Curva descubierta por Jakob Bernoulli como modificación de una elipse, inicialmente fue llamada lemniscus, que en Latín significa cinta colgante y gráficamente se ve como el símbolo de infinito.

para que la Lemniscata quede totalmente determinada debemos fijar el valor de la constante, para que la figura quede centrada imponemos que $(0,0)$ está en la curva luego

$$d_{f_1}^2 \cdot d_{f_2}^2 = a^4$$

y así la ecuación buscada es

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

Pasando a coordenadas polares recordamos que $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$ reemplazando en la ecuación

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) &= ((\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2)^2 - 2a^2((\rho\cos(\theta))^2 - (\rho\sin(\theta))^2) \\ &= \rho^4(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)^2 - 2a^2\rho^2(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) \\ &= \rho^4 \cdot 1^2 - 2a^2\rho^2\cos(2\theta)\end{aligned}$$

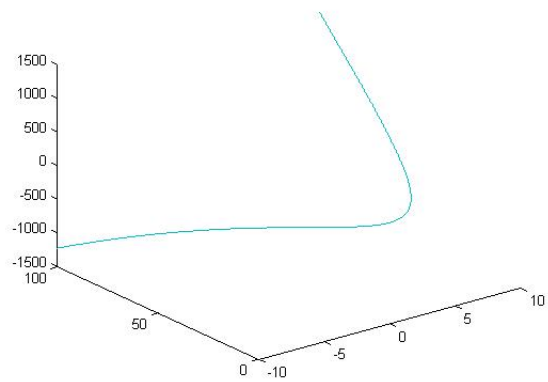
Concluímos que

$$\rho^4 \cdot 1^2 - 2a^2\rho^2\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)$$

queda propuesto formalizar la parametrización.

4. Para la curva definida por $y = x^3$ y $z = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2$, encontrar la longitud de la curva.

Solución.- Primera grafiquemos la curva para saber como se comporta



es claro que la curva tiene longitud infinita entonces sólo calcularemos el largo en un intervalo genérico $[a,b]$. La fórmula a utilizar dice lo siguiente:

$$L_a^b = \int_a^b ||\frac{dr}{dt}(s)\,ds||$$

Identifiquemos cada cosa

$$r(t) = (t, t^3, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2)$$

con ello

$$\frac{dr}{dt} = (1, 3t^2, \sqrt{6}t)$$

así

$$||\frac{dr}{dt}|| = \sqrt{1+9t^4+6t^2} = (3t^2+1)$$

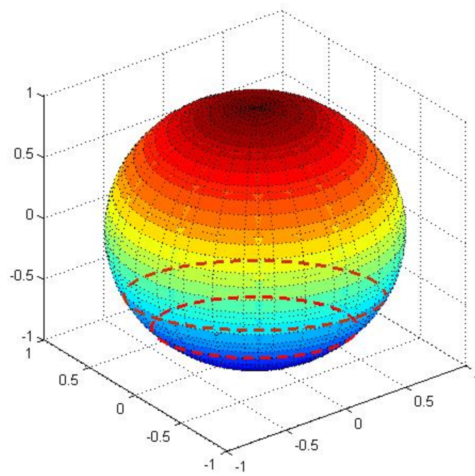
y finalmente

$$L_a^b = \int_a^b ||\frac{dr}{dt}(s)\, ds|| = \int_a^b (3t^2+1)\, ds = (t^3+t)_a^b = (b^3+b)-(a^3+a)$$

Problemas Generales

1. Considere un modelo esférico del planeta Tierra, esto es, considere que la Tierra es una esfera perfecta de radio $R = 6400[km]$. Descartando el Polo Norte parametrice los lugares del planeta en los cuales si caminamos un kilometro hacia el sur, luego uno hacia el Oeste y finalmente uno hacia en Norte quedamos exactamente en el punto de partida.

   Solución.- Consideremos la siguiente figura

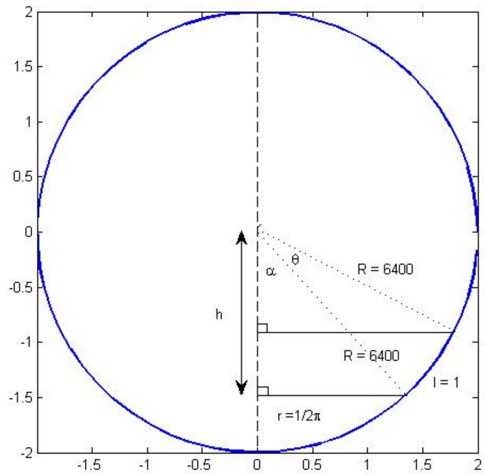


donde el círculo inferior es de perímetro unitario (en kilómetros) y el círculo superior está separado por un kilómero de distancia medido sobre el manto de la Tierra. Luego la afirmación moverse un kilómetro hacia el sur nos deja en el círculo de perímetro unitario, caminar un kilómetro al Oeste nos da una vuelta al planeta y subir nos deja en la posición inicial.

Busquemos las ecuaciones que determinan el lugar geométrico mencionado. Para que un círculo tenga perímetro unitario entonces el radio:

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 1 \\ r &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

ahora necesitaremos un poco de geometría para encontrar el radio de la circunferencia superior, que es la realmente importante. Si hacemos un corte transversal en la esfera nos queda la siguiente situación:



Del Teorema de Pitágoras se deduce que

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

y con esto

$$\tan(\alpha) = \frac{r}{h} \Rightarrow \alpha = \arctan(\frac{r}{h})$$

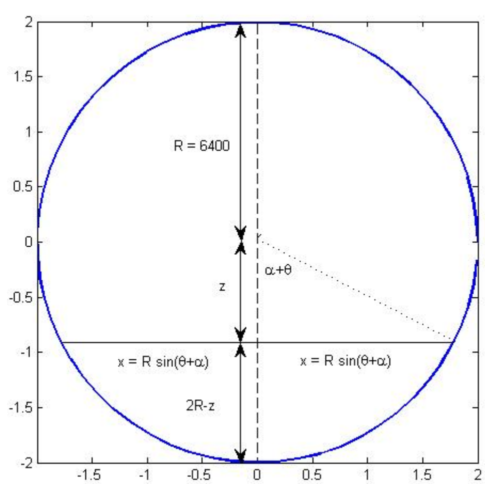
Por otro lado, de la definición de radianes,

$$R\theta = l \Rightarrow \theta = \frac{l}{R}$$

Finalmente el radio buscado viene de la siguiente relación

$$\sin(\alpha + \theta) = \frac{x_0}{R} \Rightarrow x_0 = R\sin(\alpha + \theta)$$

Ahora para calcular la altura a la cual está ubicado el círculo superior observemos lo siguiente:



luego tenemos la relación

$$\begin{aligned} x_0^2 &= (R+z)(2R-z) \\ x_0^2 &= 2R^2 + Rz - z^2 \end{aligned}$$

donde obtenemos los siguientes posibles valores para z:

$$z_0 = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4(x_0^2 - 2R^2)}}{2}$$

y nos quedamos con el signo positivo pues las distancias deben ser siempre positivas.

Con todo lo anterior la parametrización es

$$\rho = x_0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z = z_0$$

2. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de modo que su altura y el ángulo θ en coordenadas cilíndricas cumplen la relación $z = e^{-\theta}$, con $\theta \in [0, +\infty)$.

   a) Encuentre una parametrización de Γ. Dibuje la curva.

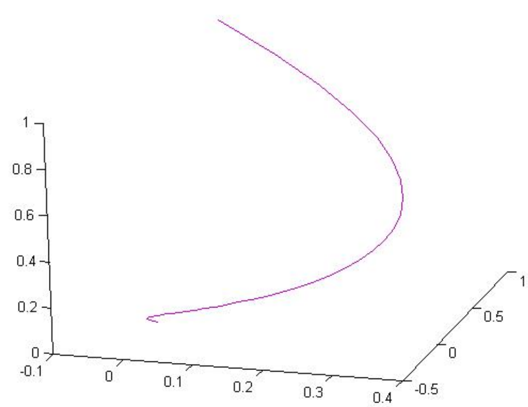
   Solución.- Debemos percatarnos que la parametrización será mucho más simple escribirla en coordenadas cilíndricas, esto pues

   $$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow (\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 = z^2 \Rightarrow \rho = |z|$$

   además nos dan la relación entre θ y z luego la parametrización es:

   $$\rho = |e^{-\theta}|, \quad \theta \in [0, +\infty), \quad z = e^{-\theta}$$

   y así podemos bosquejar un gráfico



b) Calcule el largo de Γ.

Solución.- Usando la misma fórmula de antes, escribamos $\vec{r}(\theta)$

$$\vec{r}(\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) = (e^{-\theta}\cos(\theta), e^{-\theta}\sin(\theta), e^{-\theta}) = e^{-\theta}(\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$$

derivando

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -e^{-\theta}(\cos(\theta), \sin(\theta), 1) + e^{-\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$$

calculamos la norma

$$\begin{aligned}
||\frac{d\vec{r}}{d\theta}|| &= ||-e^{-\theta}(\cos(\theta), \sin(\theta), 1) + e^{-\theta}(-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)|| \\
&= ||e^{-\theta}(\cos(\theta)+\sin(\theta), \sin(\theta)-\cos(\theta), 1)|| \\
&= e^{-\theta}||(\cos(\theta)+\sin(\theta), \sin(\theta)-\cos(\theta), 1)|| \\
&= e^{-\theta}\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)-2\sin(\theta)\cos(\theta)+1} \\
&= e^{-\theta}\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)+\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)+1} \\
&= e^{-\theta}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

así el largo de curva

$$L_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} e^{-\theta}\sqrt{3}\,d\theta = \sqrt{3}$$