Auxiliar 7 de Mayo
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Raúl Uribe

1) Determinar cuál debe ser la función $f : IR \to IR$ continua, y el valor de la constante a para que se cumpla:

$$\boxed{\int_a^x t \cdot f(t)dt = \sin(x) - x \cdot \cos(x) - \frac{x^2}{2}}$$

2) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \int_0^{\sin(x)} e^{-t^2} dt}{1 - \cos(x)}$$

3) Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ dos funciones continuas. Además se sabe que g es derivable en (0,1) y satisface las siguientes relaciones:

$$g(1) < 1 \quad \text{y} \quad 0 \le g'(x) \le 1 \quad \forall x \in (0,1)$$

Considere la función $F(x)$ definida en [0,1] por:

$$\boxed{F(x) = 2x - 1 - \int_0^{g(x)} f(t)dt}$$

i) Pruebe que $F(x)$ es continua y que $F(0) < 0 < F(1)$, concluya que $F(x)$ posee al menos un cero en [0,1].

ii) Pruebe que $F(x)$ es derivable en (0,1) y que es estrictamente creciente en este intervalo. Deduzca que el cero de $F(x)$ es único.