

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

PROFESOR: RAÚL URIBE

PROFESORES AUXILIARES: FELIPE RUIZ - CRISTÓBAL QUIÑINAO

Pregunta 1.-

- (a) Usando el cambio de variables $u = \tan(\frac{x}{2})$, calcule $\int \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)} dx$.
- (b) Sean $I = \int \cos(\ln(x)) dx$ y $J = \int \sin(\ln(x)) dx$. Usando integración por partes, plantee un sistema lineal que permita calcular I y J . Calcule I y J .

Solución.-

- (a) Hacemos caso a la indicación, recordemos que

$$\begin{aligned}\sin(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2 \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + 1\right)} = 2 \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1} \\ \cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned}u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) &\Rightarrow du = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow 2 du = (1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)) dx \Rightarrow 2 \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} du = dx \\ &\Rightarrow 2 \frac{1}{1 + u^2} du = dx\end{aligned}$$

luego la integral nos queda:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)} dx &= \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} 2 \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 2 \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{1+u^2+1-u^2}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= 2 \int \frac{(1+u^2) \frac{1-u^2}{1+u^2}}{2} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{1-u^2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{2-1-u^2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{2}{1+u^2} du - \int \frac{1+u^2}{1+u^2} du \\ &= 2 \arctan(u) - u + Cte \\ &= x - \tan\left(\frac{x}{2}\right) + Cte\end{aligned} \tag{1}$$

- (b) Para I hacemos escogemos:

$$\begin{aligned}u &= \cos(\ln(x)) \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln(x)) dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x\end{aligned}$$

luego I se reduce a:

$$I = \int \cos(\ln(x)) dx = x \cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x)) dx = x \cos(\ln(x)) + J$$

Procedemos de manera similar con J :

$$\begin{aligned} u = \sin(\ln(x)) & \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cos(\ln(x)) dx \\ dv = dx & \Rightarrow v = x \end{aligned}$$

luego J se reduce a:

$$J = \int \sin(\ln(x)) dx = x \sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x)) dx = x \sin(\ln(x)) - I$$

y el sistema pedido es:

$$I = x \cos(\ln(x)) + J \quad (2)$$

$$J = x \sin(\ln(x)) - I \quad (3)$$

Sumando y restando ambas ecuaciones se concluye que

$$I = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)))$$

y

$$J = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))$$

Pregunta 2.- Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente

(a) Usando la partición $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pruebe que $\forall n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i)$$

(b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que $\forall n \geq 1$

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!$$

Solución.-

(a) Siguiendo la indicación, tomemos la partición $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$; con esto se tiene $\Delta x = 1$ y usando el hecho que la función es creciente, se tiene $\inf_{x \in (i, i+1)} f(x) = f(i)$ y así:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = \sum_{i=1}^{n-1} \inf_{x \in (i, i+1)} f(x) \Delta x \leq \int_1^n f(x) dx$$

Por otro lado, $\sup_{x \in (i, i+1)} f(x) = f(i+1)$ y así

$$\int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=1}^{n-1} \sup_{x \in (i, i+1)} f(x) \Delta x$$

con un cambio de índices adecuado $\sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^n f(i)$ y finalmente

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_{\frac{1}{n}}^n f(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i)$$

obviando las desigualdades que no nos sirven para el problema se concluye que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i)$$

- (b) Como $\ln(x)$ está bien definida en $[1, +\infty)$, es creciente y no negativa en ese intervalo se puede aplicar la conclusión anterior y se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) \leq \int_1^n \ln(x) dx \leq \sum_{i=2}^n \ln(i)$$

usando las propiedades del logaritmo y $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$ se tiene

$$\ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)) \leq x \ln(x) - x \Big|_1^n \leq \ln(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$$

$$\ln((n-1)!) \leq (n \ln(n) - n) - (\ln(1) - 1) \leq \ln(n!)$$

$$\ln((n-1)!) \leq \ln(n^n) - n + 1 \leq \ln(n!)$$

y elevando exponencialmente se tiene la conclusión pedida.

Pregunta 3.- Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 2(i+n) \frac{1}{n^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=1}^n \frac{\arctan(\frac{i}{n})}{n^2 + i^2}$

Solución.-

- (a) Notemos que el límite pedido lo podemos escribir como una suma de Riemann, para ello necesitamos el intervalo $[a, b]$, la partición considerada y la función a integrar. Si reescribimos el argumento del límite por:

$$\sum_{i=1}^n 2(i+n) \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^n 2\left(\frac{i}{n} + 1\right) \frac{1}{n}$$

podemos reconocer términos. Esto pues si consideramos el intervalo $[0, 1]$ equiespaciado con una partición de intervalos de largo $\frac{1}{n}$ se tiene lo siguiente:

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i = \frac{i}{n}$$

con ello la suma queda dada por

$$\sum_{i=1}^n 2(x_i + 1) \Delta x_i$$

lo que converge a la integral

$$\sum_{i=1}^n 2(x_i + 1) \Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2(x + 1) dx$$

la cual existe y vale $\int_0^1 2(x + 1) dx = 2(\frac{x^2}{2} + x) \Big|_0^1 = 3$; con lo que concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 2(i + n) \frac{1}{n^2} = 3$$

(b) Del mismo modo que antes

$$n \sum_{i=1}^n \frac{\arctan(\frac{i}{n})}{n^2 + i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\arctan(\frac{i}{n})}{1 + (\frac{i}{n})^2} \frac{1}{n}$$

usando la misma partición y el mismo intervalo:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \frac{1}{n} \\ x_i &= a + \frac{b-a}{n} \cdot i = \frac{i}{n} \end{aligned}$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^n \frac{\arctan(\frac{i}{n})}{1 + (\frac{i}{n})^2} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{\arctan(x_i)}{1 + x_i^2} \Delta x_i$$

y tomando límite

$$\sum_{i=1}^n \frac{\arctan(x_i)}{1 + x_i^2} \Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1 + x^2} dx$$

la cual se resuelve fácilmente si consideramos el cambio de variables:

$$u = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

y con esto $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u du = \frac{\pi^2}{32}$, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=1}^n \frac{\arctan(\frac{i}{n})}{n^2 + i^2} = \frac{\pi^2}{32}$$

Pregunta 4.- Calcule mediante sumas de Riemann la siguiente integral

$$\int_a^b e^{\alpha x} dx$$

para $\alpha > 0$

Solución.-

Tomemos una partición equiespaciada de paso $\frac{(b-a)}{n}$, con ello nos queda:

$$\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n} \quad x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i$$

Por otro lado, como $\alpha > 0$ se tiene que la función $f(x) = e^{\alpha x}$ es creciente y así:

$$m_i = \inf\{e^{\alpha x} : x \in (x_i, x_{i+1})\} = e^{\alpha x_i} = e^{\alpha(a + \frac{(b-a)}{n} i)}$$

$$M_i = \sup\{e^{\alpha x} : x \in (x_i, x_{i+1})\} = e^{\alpha x_{i+1}} = e^{\alpha(a + \frac{(b-a)}{n} (i+1))}$$

ahora podemos calcular $\mathcal{S}(f, \mathcal{P})$ y $s(f, \mathcal{P})$

- Recordemos que

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha(a + \frac{(b-a)}{n} (i+1))} \frac{(b-a)}{n}$$

luego podemos reescribir esto para reconocer una suma geométrica:

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha a} e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}} (e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}})^i \frac{(b-a)}{n} = e^{\alpha a} e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}} \frac{(b-a)}{n} \frac{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n} n}}{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}}}$$

lo cual, si $n \rightarrow +\infty$, tiende a

$$e^{\alpha a} \overbrace{e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}}}^{-1} \frac{(b-a)}{n} \frac{1 - e^{\alpha(b-a)}}{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}}} = \frac{e^{\alpha a}}{\alpha} \frac{1 - e^{\alpha(b-a)}}{\underbrace{\frac{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}}}{\frac{\alpha(b-a)}{n}}}_{\rightarrow -1}} = -\frac{e^{\alpha a}}{\alpha} (1 - e^{\alpha(b-a)})$$

- Hacemos algo similar para

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha(a + \frac{(b-a)}{n} i)} \frac{(b-a)}{n}$$

que esta vez lo escribimos por

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\alpha a} (e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}})^i \frac{(b-a)}{n} = e^{\alpha a} \frac{(b-a)}{n} \frac{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n} n}}{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}}}$$

y como antes

$$e^{\alpha a} \frac{(b-a)}{n} \frac{1 - e^{\alpha(b-a)}}{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha a}}{\alpha} \frac{1 - e^{\alpha(b-a)}}{\underbrace{\frac{1 - e^{\alpha \frac{(b-a)}{n}}}{\frac{\alpha(b-a)}{n}}}_{\rightarrow -1}} = -\frac{e^{\alpha a}}{\alpha} (1 - e^{\alpha(b-a)})$$

Ahora recordamos las siguientes desigualdades

$$s(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b e^{\alpha x} dx \leq \int_a^b e^{\alpha x} dx \leq \int_a^{\overline{b}} e^{\alpha x} dx \leq \mathcal{S}(f, \mathcal{P})$$

por Teorema del Sandwich se concluye que

$$\int_a^b e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha b} - e^{\alpha a})$$