

Cálculo Diferencial e Integral

Solución Auxiliar N°3

Profesor: Raúl Uribe

2 de abril de 2008

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones

a) $f_1(x) = \frac{1}{a\sqrt{pq}} \arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}} e^{ax}\right)$

Solución.-

$$\begin{aligned} (f_1(x))' &= \left(\frac{1}{a\sqrt{pq}} \arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}} e^{ax}\right) \right)' \\ &= \frac{1}{a\sqrt{pq}} \frac{1}{1 + \frac{p}{q} e^{2ax}} \left(\sqrt{\frac{p}{q}} e^{ax} \right)' \\ &= \frac{1}{a\sqrt{pq}} \frac{1}{1 + \frac{p}{q} e^{2ax}} \sqrt{\frac{p}{q}} a e^{ax} \\ &= \frac{1}{\sqrt{pq}} \frac{q}{q + pe^{2ax}} \sqrt{\frac{p}{q}} e^{ax} \\ &= \frac{e^{ax}}{q + pe^{2ax}} \end{aligned}$$

b) $f_2(x) = \frac{\sqrt{x(x-3a)}}{\sqrt{x-4a}}$

Solución.-

$$\begin{aligned} (f_2(x))' &= \left(\sqrt{\frac{x(x-3a)}{x-4a}} \right)' \\ &= \frac{\sqrt{x-4a}}{2\sqrt{x(x-3a)}} \left(\frac{x^2-3ax}{x-4a} \right)' \\ &= \frac{\sqrt{x-4a}}{2\sqrt{x(x-3a)}} \left(\frac{(x^2-3ax)'(x-4a) - (x^2-3ax)(x-4a)'}{(x-4a)^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x-4a}}{2\sqrt{x(x-3a)}} \left(\frac{(2x-3a)(x-4a) - (x^2-3ax)}{(x-4a)^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x-4a}}{2\sqrt{x(x-3a)}} \left(\frac{2x^2-3ax-8ax+12a^2-x^2+3ax}{(x-4a)^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x-4a}}{2\sqrt{x(x-3a)}} \left(\frac{x^2-8ax+12a^2}{(x-4a)^2} \right) \end{aligned}$$

c) $f_3(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{ax}}\right)$

Solución.-

$$\begin{aligned}
 (f_3(x))' &= \left(\arctan\left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{ax}}\right) \right)' \\
 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{ax}}\right)^2} \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{ax}} \right)' \\
 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{ax}}\right)^2} \frac{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})'(1 - \sqrt[3]{ax}) - (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})(1 - \sqrt[3]{ax})'}{(1 - \sqrt[3]{ax})^2} \\
 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{ax}}\right)^2} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(1 - \sqrt[3]{ax}) + (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})\frac{\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(1 - \sqrt[3]{ax})^2} \\
 &= \frac{(1 - \sqrt[3]{ax})^2}{(1 - \sqrt[3]{ax})^2 + (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})^2} \frac{(1 - \sqrt[3]{ax}) + (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{ax})^2} \\
 &= \frac{1}{1 - 2\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}} \frac{1 - \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
 &= \frac{1}{1 + \sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{a^2}} \frac{1 + \sqrt[3]{a^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}
 \end{aligned}$$

d) $f_4(x) = \log\left(\frac{a+b\tan(x)}{a-b\tan(x)}\right)$

Solución.-

$$\begin{aligned}
 (f_4(x))' &= \left(\log\left(\frac{a+b\tan(x)}{a-b\tan(x)}\right) \right)' \\
 &= \frac{a-b\tan(x)}{a+b\tan(x)} \left(\frac{a+b\tan(x)}{a-b\tan(x)} \right)' \\
 &= \frac{a-b\tan(x)}{a+b\tan(x)} \left(\frac{(a+b\tan(x))'(a-b\tan(x)) - (a+b\tan(x))(a-b\tan(x))'}{(a-b\tan(x))^2} \right) \\
 &= \frac{a-b\tan(x)}{a+b\tan(x)} \left(\frac{b\sec^2(x)(a-b\tan(x)) + b\sec^2(x)(a+b\tan(x))}{(a-b\tan(x))^2} \right) \\
 &= \frac{a-b\tan(x)}{a+b\tan(x)} \frac{2ab\sec^2(x)\tan(x)}{(a-b\tan(x))^2} \\
 &= \frac{1}{a+b\tan(x)} \frac{2ab\sec^2(x)\tan(x)}{(a-b\tan(x))} \\
 &= \frac{2ab\sec^2(x)\tan(x)}{a^2 - b^2\tan^2(x)}
 \end{aligned}$$

2. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

encontrar a y b tales que f es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Solución.-

Recordamos que una función derivable es necesariamente continua, esto es,

$$f \text{ derivable} \Rightarrow f \text{ continua}$$

y notamos por ende que debemos imponer la continuidad de f . Para ello analizamos los límites laterales en $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 + 3x + 1 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ax + b = a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 6$$

Ahora queremos que sea derivable en todo el eje real, como es claro que el único punto donde la derivada no necesariamente existe es $x = 1$ nos centramos entonces en analizar la existencia del límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Para que este bien definido los límites laterales deben existir y ser iguales, con esto:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h)^2 + 3(1+h) + 1 - \overbrace{(a+b)}^{=6}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 + 4h + 2h^2 + 3 + 3h + 1 - 6}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} 7 + 2h \\ &= 7 \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a(1+h) + b - (a+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah + (a+b) - (a+b)}{h} \\ &= a \end{aligned}$$

se concluye que $a = 7$ y por ende $b = -1$.

3. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log(x)}{x-1} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Encuentre α para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución.- Calculemos el límite cuando $x \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log(x)}{x-1} \\ &\stackrel{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \log(x))'}{(x-1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \log(x)}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

luego, es claro que con esto para asegurar la continuidad basta hacer $\alpha = 1$.

b) Analice la existencia de f' ($x > 0$).

Solución.- Si $x \neq 1$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x \log(x)}{x-1} \right)' \\ &= \frac{(x \log(x))'(x-1) - (x \log(x))(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(1 + \log(x))(x-1) - (x \log(x))}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1 + x \log(x) - \log(x) - x \log(x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1 - \log(x)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

para $x = 1$ debemos calcular la derivada por definición

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+h) \log(1+h)}{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) \log(1+h) - h}{h^2} \\ &\stackrel{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \log(1+h) - 1}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{2h} \\ &\stackrel{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+h)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

se concluye que f' viene dada por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1-\log(x)}{(x-1)^2} & \text{si } x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

c) Determine la continuidad de f' en $(0, +\infty)$.

Solución.- Basta calcular el límite de la derivada anterior en $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\log(x)}{(x-1)^2} \\ &\stackrel{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego f' es continua en el intervalo $(0, +\infty)$.

d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a f en el punto $P(x_0, y_0) \neq (1, 1)$.

Solución.- La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y de pendiente m es

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

luego como ya tenemos el punto, solo nos resta saber m .

Ahora, como la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva definida por los pares ordenados $(x, f(x))$, se sigue que

$$m(x_0) = f'(x_0) = \frac{x_0 - 1 - \log(x_0)}{(x_0 - 1)^2}$$

así la ecuación que buscamos es

$$y = \frac{x_0 - 1 - \log(x_0)}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 \log(x_0)}{x_0 - 1}$$

4. Considere, para $a > 0$, la función

$$f(x) = \frac{a}{2} \log \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

a) Demuestre que la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

b) La tangente a la curva en un punto $P(x_0, y_0)$ cualquiera, corta al eje OY en un punto que llamaremos T . Pruebe que la longitud del trazo $\overline{PT}$ es constante (independiente del $P(x_0, y_0)$ escogido).

Solución.- Resuelta en la clase anterior.

5. Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

haga un estudio detallado de la diferenciabilidad, esto es, decida en que puntos existe la derivada de f y en cuales no.

Indicación: Estudie por separado los conjuntos $\mathbb{Q}$, $B := \{2\pi k/k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R} \setminus (B \cup \mathbb{Q})$.

Solución.-

- Sea $x \in \mathbb{Q}$ entonces es claro que $\cos(x) \neq 1$ esto pues $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 1 + \cos(x)}{h}$$

si tomamos una sucesión de $\{h_n\} \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tal que $h_n \rightarrow 0$ y calculamos el límite anterior es claro que no existe:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \cos(x)}{h_n}$$

- En el caso $x \in \mathbb{R} \setminus (B \cup \mathbb{Q})$ se tiene lo mismo pues $1 - \cos(x) \neq 0$ y entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\notin \mathbb{Q}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos(x)}{h}$$

el cual sigue sin existir.

- Finalmente en el caso $x \in B$ se sigue que $f(x) = 0$ y por ende el límite en conflicto se reduce a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi k + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(2\pi k + h)}^{\notin \mathbb{Q}}}{h} = 0$$

Concluimos que f es diferenciable solo en B .

6. Sea $c > 1$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que

$$f \text{ es diferenciable en } 0 \Leftrightarrow \exists L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x}$$

Solución.- Como nos piden demostrar un ssi debemos hacer ambas implicancias:

($\Rightarrow$) Supongamos que f es diferenciable en $x = 0$ entonces el siguiente límite existe

$$f'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

ahora, podemos escribir el otro límite de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(cx) - f(0) + f(0) - f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} c \frac{f(cx) - f(0)}{cx} - \frac{f(0) - f(x)}{x} \\ &= c \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(cx) - f(0)}{cx} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(x)}{x} \\ &= c \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} - f'(0) \\ &= (c - 1)f'(0) \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Por otro lado si el límite de la izquierda existe se tiene, del análisis anterior, que

$$\frac{L}{c-1} = f'(0)$$

entonces la función necesariamente es diferenciable en $x = 0$.

7. Se dice que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a, b]$ si existe una constante $\kappa \geq 0$ tq

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \kappa$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $\{t_i\}_{i=1}^n$ una colección de puntos tales que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$.

Demuestre que si f es derivable en $[a, b]$ y f' es acotada, digamos por M , en (a, b) entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.

Solución.- Tomemos un $n \in \mathbb{N}$ cualquiera y una partición $\{t_i\}_{i=1}^n$ del intervalo tal que se cumple

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n = b$$

entonces en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ se cumple lo siguiente:

- f es continua en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ f es derivable en el intervalo (t_{i-1}, t_i) , más aun, la derivada está acotada superiormente por M en cualquiera de los intervalos que tomemos.

Ahora podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para cada uno de los intervalos, esto es

$$\exists \xi_i \in (t_{i-1}, t_i) \text{ t.q. } f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

tomando módulo y acotando por M se tiene

$$|f(t_i) - f(t_{i-1})| = |f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})| = |f'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}) < M(t_i - t_{i-1})$$

finalmente sumando sobre i se concluye lo pedido

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n M(t_i - t_{i-1}) = M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \stackrel{\text{telescópica}}{=} M(t_n - t_0) = \overbrace{M(b-a)}^{\kappa}$$

pues $\kappa := M(b-a)$ es una constante independiente de n y de la partición escogida.