# Cálculo Diferencial e Integral
# Auxiliar N°3

Profesor: Raúl Uribe

31 de marzo de 2008

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones

   *a*) $f_1(x) = \frac{1}{a\sqrt{pq}}\ \arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\ e^{ax}\right)$

   *b*) $f_2(x) = \frac{\sqrt{x(x-3a)}}{\sqrt{x-4a}}$

   *c*) $f_3(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}{1-\sqrt[3]{ax}}\right)$

   *d*) $f_4(x) = \log\left(\frac{a+b\tan(x)}{a-b\tan(x)}\right)$

2. Considere
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ ax+b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$
encontrar $a$ y $b$ tales que $f$ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

3. Sea
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\log(x)}{x-1} & \text{si} \quad x > 0, x \neq 1 \\ \\ \alpha & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

   *a*) Encuentre $\alpha$ para que $g$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

   *b*) Analice la existencia de $f'$ $(x > 0)$.

   *c*) Determine la continuidad de $f'$ en $(0, +\infty)$.

   *d*) Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f$ en el punto $P(x_0, y_0)$.

4. Considere, para $a > 0$, la función
$$f(x) = \frac{a}{2}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$$

   *a*) Demuestre que la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

   *b*) La tangente a la curva en un punto $P(x_0, y_0)$ cualquiera, corta al eje $OY$ en un punto que llamaremos $T$. Pruebe que la longitud del trazo $\overline{PT}$ es constante (independiente del $P(x_0, y_0)$ escogido).

5. Para la función
$$f(x) = \begin{cases} 1-\cos(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
haga un estudio detallado de la diferenciabilidad, esto es, decida en que puntos existe la derivada de $f$ y en cuales no.

   **Indicación:** Estudie por separade los conjuntos $\mathbb{Q}$, $B := \{2\pi k / k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}\backslash(B \cup \mathbb{Q})$.

6. Sea $c > 1$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que

$$f \text{ es diferenciable en } 0 \Leftrightarrow \exists\ L = \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x}$$

.

7. Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a, b]$ si existe una constante $\kappa \geq 0$ tq

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \kappa$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ una colección de puntos tales que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$.
Demuestre que si $f$ es derivable en $[a, b]$ y $f'$ es acotada, digamos por $M$, en $(a, b)$ entonces $f$ es de variación acotada en $[a, b]$.