Examen

P1. **(a)** (2 ptos.) Demuestre, usando inducción, que $\forall n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

(b) Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, dada por $\mathcal{F}(f, g) = (f \circ g)^{-1}$.

(1) (0.5 ptos.) Justifique que $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.

(2) (2 ptos.) Pruebe que Ψ es epiyectiva pero no inyectiva.

(3) (1 ptos.) Demuestre que $\Psi\big(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})\big) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

P2. **(a)** **(1)** (1 pto.) Resuelva la ecuación

$$x^2 - (2\cos\theta)x + 1 = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(2) (1.5 ptos.) Encuentre todas las raíces del polinomio $p(x) = x^{2n} - (2\cos\theta)x^n + 1$, con $\theta \in \mathbb{R},\ n \geq 2$.

(3) (1.5 ptos.) Factorice en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ el polinomio anterior, para $n = 3$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(b) (2 ptos.) Calcule la suma

$$S = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

y exprese su valor en la forma $a + bi$.

P3. **(a)** (2 ptos.) Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(1, 3)$ y $D(2, 16)$, encuentre el polinomio $p(x)$, con $\mathrm{gr}(p) \leq 3$ cuyo gráfico contenga a dichos cuatro puntos.

(b) Considere los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$ y la recta de ecuación $y = ax$, en que $a = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$. Se demostrará que

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - a \cdot x_k)^2 = \min \left\{ \sum_{k=1}^{n} (y_k - b \cdot x_k)^2 \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \circledast$$

Para esto proceda como sigue:

(1) (2 ptos.) Pruebe que dado $b \in \mathbb{R}$, b cualquiera fijo,

$$\sum_{k=1}^{n} (a - b)^2 x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} (a - b)(y_k - a \cdot x_k) x_k \geq 0.$$

(2) (1.5 ptos.) Para probar $\circledast$, demuestre (usando la parte anterior) que $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - b \cdot x_k)^2 \geq \sum_{k=1}^{n} (y_k - a \cdot x_k)^2.$$

Indicación: Observe que $y_k - b \cdot x_k = y_k - a \cdot x_k + a \cdot x_k - b \cdot x_k$.

(3) (0.5 ptos.) Para los puntos dados en (a) calcule a, grafique la recta $y = ax$ y los cuatro puntos.

03 de julio de 2007