

Dos Problemas de Complejos

P1

Sean $z_1, z_2 \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, y tales que $|z_1 + z_2| = 2$. Muestre que $z_1 = z_2$.

Solución:

La idea es ocupar al máximo el hecho de que $|z_1| = |z_2| = 1$. La gracia es que esto nos permite asegurar que $z_1 = e^{i\theta}, z_2 = e^{i\alpha}$. Luego $z_1 + z_2 = \cos\theta + \cos\alpha + i(\sin\theta + \sin\alpha)$, y así $|z_1 + z_2|^2 = 4 \Rightarrow (\cos\theta + \cos\alpha)^2 + (\sin\theta + \sin\alpha)^2 = 4 \Rightarrow \cos^2\theta + 2\cos\theta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\theta + 2\sin\theta\sin\alpha + \sin^2\alpha = 4 \Rightarrow 2(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = 2$

(Usando el hecho de que $\cos^2x + \sin^2x = 1 \forall x$). Pero $(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = \cos(\theta - \alpha)$, luego concluimos que $\cos(\theta - \alpha) = 1 \forall x$ (para algún $k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow \theta - \alpha = 2k\pi$ $\Rightarrow z_1 = z_2$.

P2

Expresa en la forma $a + bi$ las raíces cuartas del complejo $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

Solución:

La idea es siempre dejar el complejo de la forma más amistosa posible. Así, primero racionalizamos: $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{1-(i\sqrt{3})^2} (1+i\sqrt{3})^2 = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Ahora procedemos a escribir el número en forma polar, pues SIEMPRE (o casi) que uno quiere sacar las raíces de un complejo, lo hace teniéndolo escrito en forma polar, pues así resulta ser mucho más simple.

Notamos primero que nada que $|z_0| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 1$. Además, notamos que para encontrar el argumento θ , tendremos que $\cos\theta = -\frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Para descubrir cuál es el ángulo, hay varios modos que pueden hacerlo, yo sugiero hacer el dibujo, ahí notarán que el ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Luego, las cuatro raíces w_0, w_1, w_2, w_3 de z_0 están dadas por $w_k = e^{\frac{i}{n}(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)}$. Les dejo como ejercicio reemplazar los valores de k para encontrar en forma más explícita las raíces. Cualquier duda por U-Cursos, suerte y estudien!.