Breve Pauta NO OFICIAL del C1

MA110-5 - Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliares: Tomás González - Guido Lagos

Marzo 2008

Problema 1 (a) Queremos ver que, dadas las proposiciones p, q, r, s, se tiene que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ (q \wedge s)]$$

En efecto, primero vemos que la proposición se puede reescribir equivalentemente como

$$[(\bar{p} \vee q) \wedge (s \vee \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ (q \wedge s)]$$

Luego, asumiremos que

$$[(\bar{p} \vee q) \wedge (s \vee \bar{r})]$$

es verdadera, para probar que

$$[\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ (q \wedge s)]$$

Lo es también. En efecto, como (al distribuir)

$$[\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ (q \wedge s)] \Leftrightarrow [(\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ q) \wedge (\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ s)]$$

Pero por hipótesis, tenemos que tanto $(\bar{p} \vee q)$ como $(s \vee \bar{r})$ son verdaderas, lo que de inmediato dice que tanto $(\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ q)$ como $(\bar{p} \ \vee \ \bar{r} \ \vee \ s)$ son verdaderas. Esto es, la implicancia buscada es una tautología.

(b) Se tiene:

$$p \Leftrightarrow (\exists \ x \ \in \mathbb{R})(\forall \ y \ \in \ \mathbb{R})(x \leq y)$$

$$q \Leftrightarrow (\forall \ y \ \in \ \mathbb{R})(\exists \ x \ \in \mathbb{R})(x \leq y)$$

Es muy fácil darse cuenta de que la primera proposición es falsa. En efecto, si fuera verdadera se tendría que hay un número real que es menor o igual que todos los demás números reales. Esto es, la proposición dice que los números reales tienen una cota inferior real, lo que es falso, pues sabemos que, dado $x \ \in \mathbb{R}$, basta tomar, por ejemplo, $y = x - 1 \ \in \mathbb{R}$, que cumple $y < x$.
La segunda proposición es verdadera, lo que se ve sencillamente notando la afirmación de recién: dado $y \in \mathbb{R}$ siempre somos capaces de encontrar un número x que cumple $(x \leq y)$. En efecto, análogo a lo de arriba, basta tomar $x = y - 1$.
Las negaciones de cada proposición son:

$$\bar{p} \Leftrightarrow (\forall \ x \ \in \mathbb{R})(\exists \ y \ \in \ \mathbb{R})(x > y)$$

$$\bar{q} \Leftrightarrow (\exists \ y \ \in \ \mathbb{R})(\forall \ x \ \in \mathbb{R})(x > y)$$

Traten de entender lo que significa cada una (no era parte del ejercicio).

P2 **(a)** Sean X e $Y \subseteq U$ que cumplen la hipótesis

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A)$$

Veamos que $X = Y$. En efecto, sea $a \in X$, veamos que $a \in Y$.
Como $a \in X \subseteq X \cup A = Y \cup A$ (por hipótesis), tenemos que al menos una de las siguientes es cierta: $a \in Y$ o $a \in A$.
Si $a \in Y$ ya tenemos lo buscado. Por otro lado si $a \in A$, como ya tenemos $a \in X$, sale que $a \in \ X \cap A = Y \cap A$. Luego, se debe tener que $a \in Y$, que era lo que queríamos. Con esto obtenemos que $X \subseteq Y$.
La otra inclusión ($Y \subseteq X$)sale de manera análoga, tomando un elemento $y \in Y$ y procediendo como antes (Háganlo).

(b) Tenemos que $X \in \mathfrak{F}_A \Leftrightarrow X \subseteq U, (X \cap A) \ \neq \phi$. Esta pregunta tiene tres partes:

- $U \in \mathfrak{F}_A, \ \ U \in \mathfrak{F}_A$: Como $A \cap U = A \neq \phi$, $A \cap A = A \neq \phi$, siguue de inmediato (trivialmente $A, U \subseteq U$) que $U \in \mathfrak{F}_A, \ \ U \in \mathfrak{F}_A$
- Tenemos que $A \backslash B \neq \phi$. Esto dice de inmediato que $A \cap B^C \neq \phi$. Luego (asumiendo que U es el universo, luego $B^C \subseteq U$), sale que $B^C \in \mathfrak{F}_A$
- Para $B \in \mathfrak{F}_A$, ya tenemos que $A \cap B \neq \phi$. Ahora bién, $B \subseteq B \cup C$ nos dice que $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$, en particular $A \cap (B \cup C) \neq \phi$. Como además $C \subseteq U$, sale que por definición $(B \cup C) \in \mathfrak{F}_A$

$\square$