Clase Auxiliar Extra / Algebra / 28 Mayo 2008

Profesora: María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P1 Sea $(\mathcal{G},*)$ un grupo tal que $|\mathcal{G}|=3$, $\mathcal{G}=\{a,b,e\}$, con e el neutro de $\mathcal{G}$. Pruebe que $a^{-1}=b$.

P2 Considere el conjunto $\mathbb{Z}_{13}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ con la operación $\cdot_{13}$ de multiplicación módulo 13. Sean $A_1=\{1,12\}$, $A_2=\{1,2,4,6,8,10,12\}$, $A_3=\{1,5,8,12\}$. Señale cual de los conjuntos anteriores con la operación $\cdot_{13}$ es un grupo y cual no lo es. Justifique claramente su respuesta.

P3 Sea $(G,*)$ un grupo y G' un subgrupo de G. Sea $f:G\to G$ un homomorfismo de grupos que satisface la propiedad: $f(G')\subseteq G'$. Se define el conjunto:

$$V=\{g\in G/\exists n\in\mathbb{N}, f^n(g)\in G'\}$$

donde f^n es la composición de f con ella misma n veces y $f^0=id_G$. Probar que V es un subgrupo de G.

P4 Considere el grupo abeliano $(G,\bullet)$. Para $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$ se define $G^k=\left\{a^k/a\in G\right\}$ donde $a^k=a\bullet a\bullet a\bullet\ldots\bullet a$ (k veces)

a) Demuestre que $(G^k,\bullet)$ es subgrupo de $(G,\bullet)$

b) En $((\mathbb{Z}_{53}^*),\bullet_{53})$ determine el inverso de $[9]^2$ en que $\mathbb{Z}_{53}^*=\mathbb{Z}_{53}-\{[0]\}$ y $\bullet_{53}$ es el producto en $\mathbb{Z}_{53}$

P5 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x\in\mathbb{R}$ que $f\circ f(x)=x+1$. Probar que f no es un morfismo de $(\mathbb{R},+)$

P6 Sea $S=\mathbb{R}-\{-2\}$ y definamos la operación

$$a*b=2a+2b+ab+2,\qquad\forall a,b\in S$$

a) Pruebe $(S,+)$ es un grupo Abeliano.

b) Sea $H=\{2^n-2\quad:\quad\forall n\in\mathbb{Z}\}$. Muestre que $(H,*)$ es un subgrupo de $(S,*)$.

c) Pruebe que existe $a\in S$ tal que $H=\{a^m:m\in\mathbb{Z}\}$.

P7 Sea $(G,\cdot)$ un grupo Abeliano de cardinalidad $|G|=15$. Definamos los conjuntos:

$$F=\left\{g\in G:g^5=1\right\}$$
$$H=\left\{g\in G:g^3=1\right\}$$

donde 1 es el neutro del grupo G.

a) Pruebe que F y H son subgrupos de G.

b) Pruebe que $F\cap H=\{1\}$.

c) Pruebe que si F y H no son los subgrupos triviales, entonces $|F|=5$ y $|H|=3$. Pruebe además que:

$$\{f\cdot h:f\in F,h\in H\}=G$$

P8 Sea $(A,*)$ una estructura algebraica con elemento neutro $e \in A$ y asociativa. Se define el conjunto:

$$B = \{x \in A \ : \ \exists y \in A,\ x * y = y * x = e\}$$

a) Probar que la operación $*$ es cerrada en B.

b) Muestre que $(B,*)$ es subgrupo de $(A,*)$.

P9 Sea $(\mathcal{G},*)$ un grupo y $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in \mathcal{G}$ Pruebe que:

$$f \text{ es isomorfismo} \Leftrightarrow \mathcal{G}\text{es grupo Abeliano}$$

P10 Considere $(\mathcal{G},*)$ un grupo con neutro e y talque $|\mathcal{G}| < \infty$.

a) Para $h \in \mathcal{G}$ cualquiera pruebe que la función $f_h : \mathbb{N} \to \mathcal{G}$, definida por $f_h(n) = h^n = \overbrace{h * \cdots * h}^{n\text{veces}}$ (con $h^0 = e$), no es inyectiva. Concluya que $\exists\ m > 0$ tal que $h^m = e$.

b) Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, con $\mathcal{H} \neq \phi$ tal que $\forall\ h, h' \in \mathcal{H}$, $h * h' \in \mathcal{H}$.

b.1) Pruebe que si $h \in \mathcal{H}$, entonces $h^{-1} \in \mathcal{H}$.

b.2) Concluya que $(\mathcal{H}.*)$ es subgrupo de $(\mathcal{G},*)$.

P11 Sea $(\mathcal{G},*)$ un grupo abeliano y $\mathcal{H} = \{h : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \ : \ h \text{ es homomorfismo}\}$.
Definimos en $\mathcal{H}$ la operación $\otimes$:

$$\forall\ h, h' \in \mathcal{H}, \quad \forall\ g \in \mathcal{G},\ (h \otimes h')(g) = h(g) * h'(g)$$

a) Pruebe que $\otimes$ define una *lci* en $\mathcal{H}$.

b) Demuestre que $(\mathcal{H},\otimes)$ es grupo Abeliano.

P12 Sean $(\mathcal{G},\oplus)$ y $(\mathcal{H},\otimes)$ 2 grupos, con neutros e_g, e_h, respectivamente. Considere $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Muestre que:

a) $f^{-1}(e_h)$ es subgrupo de $\mathcal{G}$.

b) $\forall\ B \subseteq \mathcal{H}$, subgrupo de $\mathcal{H}$, $f^{-1}(B)$ es un subgrupo de $\mathcal{G}$.

c) $\forall\ A \subseteq \mathcal{G}$, subgrupo de $\mathcal{G}$, $f(A)$ es un subgrupo de $\mathcal{H}$.

P13 Sean $(\mathcal{G},\oplus)$ un grupo y $(\mathcal{H},\oplus)$ subgrupo de $(\mathcal{G},\oplus)$. Se define

$$a \oplus \mathcal{H} = \{a \oplus h \ : \ h \in \mathcal{H}\}$$

Pruebe que:

a) Si $a \in \mathcal{H}$, entonces $a \oplus \mathcal{H} = \mathcal{H}$.

b) Si $a \oplus \mathcal{H} \cap b \oplus \mathcal{H} \neq \phi$, entonces $a \oplus \mathcal{H} = b \oplus \mathcal{H}$.

P14 Sean $(\mathcal{H},*)$ y $(\mathcal{K},*)$ subgrupos de un grupo abeliano $(\mathcal{G},*)$. Pruebe que

$$\mathcal{H} * \mathcal{K} = \{h * k \ : \ h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}\}$$

es subgrupo abeliano de $(\mathcal{G},*)$.