Ejercicios Resueltos C5/Rec / Algebra / 28 Mayo 2008

Profesora: María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

Sea (G,$*$) un grupo.

Definición: Definimos para $g \in G$ y $H \subseteq G$ los siguientes conjuntos:

$$g * H = \{g * h : h \in H\}$$

$$H * g = \{h * g : h \in H\}$$

Los cuales son llamados traslación por la izquierda (respectivamente traslación por la derecha) de H en g.

Definición: H se dice *subgrupo normal* de G, si H es subgrupo y se cumple la siguiente igualdad de conjuntos:

$$g * H = H * g.$$

P1 Considere $(G, *)$ un grupo.

a) Dado H subgrupo de G, definimos la siguiente relación en G:

$$x \equiv_H y \Longleftrightarrow x * y^{-1} \in H$$

Demuestre que $\equiv_H$ es relación de equivalencia.

b) Sea $H \subseteq G$ subgrupo normal de G.

b.1) Pruebe que $*$ es *compatible* con $\equiv_H$, es decir, que

$$x_1 \equiv_H y_1 \wedge x_2 \equiv_H y_2 \Longrightarrow x_1 * x_2 \equiv_H y_1 * y_2.$$

b.2) Muestre que $[x]_{\equiv_H} = \{g \in G : \exists h \in H \ tq \ g = h * x\}$. Concluya que $[x]_{\equiv_H} = H * x = x * H$.

b.3) Se define en el conjunto de las clases de equivalencia de $\equiv_H$:

$$[x]_{\equiv_H} \triangle [y]_{\equiv_H} := [x * y]_{\equiv_H}.$$

Probar que la operación está bien definida como una *lci* en $G/H = \{[x]_{\equiv_H} : x \in G\}$.

b.4) Pruebe que $(G/H, \triangle)$ es un grupo (llamado grupo cuociente).

b.5) Probar que el neutro en $(G/H, \triangle)$ es H.

`Solución:`

a) Se deja como buen ejercicio de relaciones y de estructuras algebraicas (Hacerlo!!!).

b) b.1) Sean $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2 \in G$ tq:

$$x_1 \equiv_H y_1 \wedge x_2 \equiv_H y_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 * y_1^{-1} \in H \ \wedge x_2 * y_2^{-1} \in H$$

$$\Leftrightarrow x_1 \in H * y_1 \ \wedge x_2 \in H * y_2$$

De la última equivalencia, como H es subgrupo normal, se tiene que $H * y_1 = y_1 * H$, y por lo tanto:

$$x_1 \equiv_H y_1 \wedge x_2 \equiv_H y_2 \Leftrightarrow x_1 \in y_1 * H \ \wedge x_2 \in H * y_2$$

Luego, la hipótesis nos dice que existen $h_1,\ h_2 \in H$ tal que $x_1 = y_1 * h_1,\ y\ x_2 = h_2 * y_2$.

Por otro lado, para ver que $*$ es compatible necesitamos verificar que:

$$x_1 * x_2 \equiv_H y_1 * y_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 * x_2) * (y_1 * y_2)^{-1} \in H$$

$$\Leftrightarrow (x_1 * x_2) \in H * (y_1 * y_2).$$

Basados en la última equivalencia, nos gustaría ver que $x_1 * x_2$ puede ser escrito como un elemento en $H * (y_1 * y_2)$. En efecto,

$$x_1 * x_2 = (y_1 * h_1) * (h_2 * y_2) = [y_1 * (h_1 * h_2)] * y_2$$

Donde hemos usado la hipotesis sobre x_1, y_1, y que $*$ es asociativa.

Ahora, como $h_1 * h_2 \in H$, se concluye que $y_1 * (h_1 * h_2) \in y_1 * H$, y entonces usando que H es subgrupo normal deducimos que $\exists h \in H$ tq $y_1 * (h_1 * h_2) = h * y_1$. Con esto:

$$x_1 * x_2 = (h * y_1) * y_2 = h * (y_1 * y_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 * x_2) \in H * (y_1 * y_2).$$

Luego. hemos logrado probar que $x_1 * x_2 \equiv_H y_1 * y_2$, de donde se tiene que, efectivamente, $*$ es compatible con $\equiv_H$.

b.2) En efecto,

$$[x]_{\equiv_H} = \{g \in G : x \equiv_H g\} = \{g \in G : g \equiv_H x\} = \{g \in G : g \in H*x\} = \{g \in G : \exists h \in H\ tq\ g = h*x\}.$$

La igualdades de conjuntos que aparecen aquí son verdaderas pues todas las proposiciones que definen los conjuntos involucrados son equivalentes.

El resto de este ejercicio se deja propuesto fácil (Hacerlo!!!).

b.3) Primero se comprueba, todo par de elementos elementos en G/H tiene imagen (trivial de la definición).

El paso siguiente es verificar que, al operar 2 elementos, el resultado es único.

Recordemos que los elementos en G/H son conjuntos. Observando la definición de $\triangle$ nos damos cuenta de que, via esta operación, a el conjunto que contiene a x operado con el conjunto que contienen a y le asignamos el conjunto que contiene a $x * y$.

Luego, podría ocurrir que si en lugar de x e y se tomaran otros elementos de cada conjunto se obtuviera un resultado distinto... ¿¿puede ocurrir esto??

Afortunadamente, la respuesta es negativa, y la razón es que $*$ es compatible con $\equiv_H$, pues ésta propiedad nos asegura que la clase de equivalencia de $[x*y]_{\equiv_H}$ NO cambia si en vez de x ponemos algún elemento relacionado con x y/o en vez de y ponemos algún elemento relacionado con y ; en conclusión, no importa que elementos tomemos de cada clase de equivalencia, la operación $\triangle$ nos va a entregar siempre el mismo resultado, o sea, es una función.

Para finalizar, debemos probar que $\triangle$ nos entrega como resultado un elemento en G/H, pero esto es trivial de la definición.
En conclusión, $\triangle$ es una *lci* en G/H.

b.4) `Asociatividad.` Sean $[x]_{\equiv_H}, [y]_{\equiv_H} y [z]_{\equiv_H} \in G/H$, veamos:

$$[x]_{\equiv_H} \triangle ([y]_{\equiv_H} \triangle [z]_{\equiv_H}) = [x]_{\equiv_H} \triangle ([(y*z)]_{\equiv_H}) = [x*(y*z)]_{\equiv_H}$$

$$= [(x*y)*z]_{\equiv_H} = ([(x*y)]_{\equiv_H}) \triangle [z]_{\equiv_H} = ([x]_{\equiv_H} \triangle [y]_{\equiv_H}) \triangle [z]_{\equiv_H}$$

Usamos que la operación $*$ era asociativa en G.

`Existencia del neutro.` Tenemos que buscar un elemento en G/H que pueda ser el neutro, ¿cómo lo hacemos?

Un buen punto de partida es observar el cómo está definida la operación pues esto nos ayuda a que podamos identificar y/o encontrar al neutro.

En nuestro caso observamos que $\triangle$ está definida a partir de la operación $*$.

Por lo anterior, se nos ocurre que lo más probable es que el neutro para $\triangle$ sea $[e]_{\equiv_H}$, donde estamos denotando e al neutro para $*$ en G.

Una vez que ya tenemos elegido a nuestro posible candidato debemos verificar que ES el neutro, veámoslo a continuación, sea $[x]_{\equiv_H} \in G/H$:

$$[x]_{\equiv_H} \triangle [e]_{\equiv_H} = [x*e]_{\equiv_H} = [x]_{\equiv_H}$$

Análogamente,

$$[e]_{\equiv_H} \triangle [x]_{\equiv_H} = [e*x]_{\equiv_H} = [x]_{\equiv_H}$$

Con lo anterior hemos comprobado que $[e]_{\equiv_H}$ es el neutro para $\triangle$ en G/H.

`Existencia de los inversos.` Análogo a la parte anterior, es decir, hay que observar cómo está definida $\triangle$ para poder encontrar a los inversos de elementos en G/H.

b.5) Usemos que $[x]_{\equiv_H} = H * x$, lo que fue demostrado en la parte b.2 de este problema.

$$[e]_{\equiv_H} = H * e = H$$

Queda de tarea verificar, usando que e es el neutro en $(G, *)$, que se cumple que $H * e = H$[1] (HINT: ver la igualdad como igualdad de conjuntos...).

P2 Sea H subgrupo de (G,$*$). Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) H es subgrupo normal de (G,$*$).

ii) $(\forall g \in G)(\forall h \in H)\ g * h * g^{-1} \in H$

iii) $(\forall g \in G)\ g * H * g^{-1} = H$

iv) $(\forall g \in G)(\forall h_1 \in H)(\exists h_2 \in H)$ tq $g * h_1 = h_2 * g$.

v) $*$ es compatible con $\equiv_H$.

`Solución:` Propuesto.

P3 Sea $(G, *)$ un grupo, de neutro e. Dado $A \subseteq G$ se define:

$$\langle A \rangle = \bigcap_{H \text{ subgrupo de } G,\ A \subseteq H} H = \{g \in G \ / \ \forall\ H \text{ subgrupo de } G,\ A \subseteq H\ ,\ g \in H\}$$

$\langle A \rangle$ se llama el subgrupo de G generado por A.

a) Demuestre que $\langle A \rangle$ es el subgrupo más pequeño que contienen a A, es decir, pruebe que:

a.1) $A \subseteq \langle A \rangle$.

a.2) $\langle A \rangle$ es subgrupo.

a.3) Si $W \subseteq G$, subgrupo y $A \subseteq W$ entonces $\langle A \rangle \subseteq W$.

b) Pruebe que:

$$\langle A \rangle = \{a_1^{m_1} * \cdots * a_n^{m_n} \ / \ n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ m_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

c) Muestre que:

$$\langle A \rangle = A \Leftrightarrow A \text{ es subgrupo.}$$

Concluya que $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$.

`Solución:`

a) a.1) Si $a \in A$ entonces claramente $a \in H,\ \forall\ H$ *subgrupo de* $G,\ A \subseteq H$, lo que prueba que

$$A \subseteq \langle A \rangle$$

[1] en otras palabras, verifique que no fue un GOL...

a.2) Lo primero que hay que verificar siempre es que, efectivamente, $\langle A\rangle \subseteq G$. En nuestro caso, esto es claro de la definición, pues $\langle A\rangle$ es una intersección de subconjuntos de G, por lo tanto $\langle A\rangle$ es subconjunto de G.

Para ver que es subgrupo, usemos la forma compacta, probar 2 cosas[2]:

1. $\langle A\rangle \neq \emptyset$:

Recordemos que si H es subgrupo, entonces $e \in H$, luego es trivial ver que $e \in H,\ \forall\ H \subseteq G,\ H\ subgrupo,\ A \subseteq H$, por lo que:

$$e \in \bigcap_{H\ subgrupo\ de\ G,\ A\subseteq H} H$$

Así, hemos probado que $\langle A\rangle$ tiene al menos un elemento.

2. $\forall\ a_1,\ a_2 \in \langle A\rangle\ ,\ a_1 * a_2^{-1} \in \langle A\rangle$:

Sean $a_1,\ a_2 \in \langle A\rangle$, luego, por definición de este conjunto, obtenemos:

$$a_1,\ a_2 \in H\ \forall\ H\ subgrupo\ de\ G,\ A \subseteq H$$

Lo que implica, dado que si H subgrupo existen los inversos, que:

$$a_1,\ a_2^{-1} \in H\ \forall\ H\ subgrupo\ de\ G,\ A \subseteq H$$

Usando ahora que si H es subgrupo, entonces es cerrado para la operación se tiene:

$$a_1 * a_2^{-1} \in H\ \forall\ H\ subgrupo\ de\ G,\ A \subseteq H$$

Lo que es equivalente, por definición, a:

$$a_1 * a_2^{-1} \in \langle A\rangle$$

En conclusión, $\langle A\rangle$ es subgrupo de G.

a.3) Sea $W \subseteq G$ subgrupo, tal que $A \subseteq W$. Debemos ver que $\langle A\rangle \subseteq W$.

Recordemos que:

$$\langle A\rangle = \bigcap_{H\ subgrupo\ de\ G,\ A\subseteq H} H$$

Claramente, como W forma parte de los conjuntos que se están intersectando en el lado izquierdo de la igualdad, se tiene:

$$\bigcap_{H\ subgrupo\ de\ G,\ A\subseteq H} H \subseteq W$$

Esto prueba que $\langle A\rangle \subseteq W$.

[2]no olvide comprobar que $A \subseteq G$

b) Denotemos $C = \{a_1^{m_1} * \cdots * a_n^{m_n} \ / \ n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ m_i \in \mathbb{Z}, \forall\ i = 1, \ldots, n\}$

Veremos primero que C es subgrupo de G.
Claramente, $C \subseteq G$, pues C contiene a elementos de A (luego elementos de G) operados entre sí o con sus inversos, y por ser grupo, todos los resultados de estas operaciones quedan dentro del conjunto G.

1. $C \neq \emptyset$:
Dado $a \in A$, tomando $n = 2,\ m_1 = 1,\ m_2 = -1,\ y\ a_1 = a_2 = a$, vemos que $e = a * a^{-1} \in C$.
Por lo tanto, $C \neq \emptyset$.

2. $\forall\ c_1,\ c_2 \in C,\ c_1 * c_2^{-1} \in C$:

Si $c_1,\ c_2 \in C$, existen $n, l \in \mathbb{N};\ m_1, \ldots, m_n,\ p_1, \ldots p_l \in \mathbb{Z},\ a_1, \ldots a_n, \in A,\ b_1, \ldots, b_l \in A$ tales que:

$$c_1 = a_1^{m_1} * \cdots * a_n^{m_n}$$

$$c_2 = b_1^{p_1} * \cdots * b_l^{p_l}$$

Con esto, y recordando que, en general, $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$, podemos escribir:

$$c_2^{-1} = b_l^{-p_l} * \cdots * b_1^{-p_1}$$

Calculemos,

$$\begin{aligned} c &= c_1 * c_2^{-1} \\ &= (a_1^{m_1} * \cdots * a_n^{m_n}) * (b_l^{-p_l} * \cdots * b_1^{-p_1}) \\ &= a_1^{m_1} * \cdots * a_n^{m_n} * b_l^{-p_l} * \cdots * b_1^{-p_1} \end{aligned}$$

Inspirándonos en la última igualdad, si tomamos $k = n + l,\ r_1 = m_1, \ldots, r_n = m_n,\ r_{n+1} = p_1, \ldots, r_{n+l} = p_l$; $d_1 = a_1, \ldots, d_n = a_n,\ d_{n+1} = b_1, \ldots, d_{n+l} = b_l$, se obtiene:

$$c = d_1^{r_1}, \ldots, d_k^{r_k}$$

Lo que nos dice que $c \in C$, que es lo que queríamos probar.

Se concluye así que C es subgrupo de G.

Por otro lado, $A \subseteq C$, en efecto:
Si $a \in A$, entonces tomando $n = 1,\ m_1 = 1\ y\ a_1 = a$ deducimos que $a \in C$.

Probemos ahora la igualdad de conjuntos que nos piden:

- $\subseteq$ De lo hecho anteriormente tenemos que C *subgrupo de* $G,\ A \subseteq C$, entonces, por lo visto en la parte A):

$$\langle A \rangle \subseteq C$$

- $\supseteq$ Sea H talque H *subgrupo de* $G,\ A \subseteq H$.
  Usando que H es un subgrupo que contiene a los elementos de A, deducimos que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A,\ m_1 \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$:

$$a_1^{m_1} * \cdots * a_n^{m_n} \in H$$

Lo que implica, por definición de intersección de conjuntos y ya que lo anterior fue para H cualquiera, que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A,\ m_1 \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$:

$$a_1^{m_1} * \cdots * a_n^{m_n} \in \bigcap_{H\ subgrupo\ de\ G,\ A \subseteq H} H$$

Así, usando un poco de imaginación, concluimos que $C \subseteq \langle A \rangle$.

c) Probemos la equivalencia que nos piden:

$\Rightarrow$ Este es el implica fácil, pues tenemos como hipótesis, que $\langle A \rangle = A$, y nosotros ya sabemos que $\langle A \rangle$ es un grupo (lo probamos en la parte a)), entonces necesariamente A es un grupo.

$\Leftarrow$ Debemos probar una igualdad de conjuntos.
Observemos primero que, como A es un grupo que contiene a A y rescatando del olvido una propiedad de la intersección ($C \cap D \subseteq C$), se tiene lo siguiente:

$$\langle A \rangle = \bigcap_{H \subseteq G,\ H\ subgrupo\ A \subseteq H} H \subseteq A$$

Lo que nos da una de las inclusiones que necesitamos.

Para la otra inclusión, no necesitamos que A sea subgrupo, pero si necesitamos una propiedad de la intersección (si $E \subseteq C,\ E \subseteq D$ entonces $E \subseteq D \cap C$). En efecto:

$$A \subseteq \bigcap_{H \subseteq G,\ H\ subgrupo\ A \subseteq H} H \subseteq \langle A \rangle$$

Hemos terminado de probar la igualdad de conjuntos, y por ende, este implica también está listo.

Ahora, ocupando el $\Leftarrow$ para el grupo $\langle A \rangle$, obtenemos:

$$\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$$

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sea $(G, *)$ grupo, y H subgrupo de G.

a) Pruebe que si $g \in H$ entonces $g * H = H * g = H$.

b) Sean a y $b \in G$, muestre que $a * H \cap b * H \neq \emptyset \iff a * H = b * H$.

`Solución:`

a) Propuesto. HINT: la igualdad se demuestra vía una doble inclusión.

b) ($\Leftarrow$) Basta probar que $\forall a \in G\ a * H \neq \emptyset$. En efecto, $a \in a * H$, pues el elemento neutro e de G está en H, o sea tenemos $a = a * e \in a * H$.
Finalmente, sabemos que $\forall A$ conjunto no vacío, $A \cap A \neq \emptyset$, de donde se concluye que $a * H \cap b * H \neq \emptyset$.

($\Rightarrow$) Por hipótesis $\exists h_a,\ h_b \in H$ tal que $a * h_a = b * h_b$, usemos este hecho para probar que $a * H = b * H$.

Veamos primero que $a * H \subseteq b * H$: sea $x \in a * H$, entonces $x = a * h$ para algún $h \in H$. Por la hipótesis y usando que G es grupo (en particular existe el inverso para todo elemento en G), podemos escribir $a = (b * h_b) * h_a^{-1}$. Con esto obtenemos:

$$x = [(b * h_b) * h_a^{-1}] * h = [b * (h_b * h_a^{-1})] * h = b * [(h_b * h_a^{-1}) * h]$$

Donde hemos usado la asociatividad de $*$. Recordando que H es subgrupo podemos decir que $(h_b * h_a^{-1}) * h \in H$, y en conclusión, por las igualdades anteriores, hemos logrado escribir x como un elemento de $b * H$, luego, $x \in b * H$. Esto prueba que $a * H \subseteq b * H$. La otra inclusión es análoga.
Finalmente, estas dos inclusiones prueban la igualdad pedida.

P5 Sean $m,\ n,\ r \in \mathbb{N}$ tq $r \leq m,\ r \leq n$. Calcule $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$.

HINT: usar el teorema del binomio y que $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$.

`Solución:`

Como $r \leq m,\ r \leq n$ podemos interpretar a $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ como el coeficiente que acompaña a x^r en la siguiente multiplicación de binomios $(1+x)^m(1+x)^n$ (porque???).

Por otro lado, usando teorema del binomio sabemos que el coeficiente que acompaña a x^r en la potencia de binomio $(1+x)^{m+n}$ es $\binom{m+n}{r}$.

Luego, puesto que $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$, el coeficiente que acompaña a x^r en ambos productos debe ser el mismo, razón por la cual se concluye que:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Queda propuesto como buen ejercicio, el identificar a que suma corresponde el coeficiente $\binom{m+n}{r}$ cuando no se cumple que $r \leq m,\ r \leq n$.

P6 Sean p y q dos reales no negativos tal que $p + q = 1$. Calcule $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$.

`Solución:` Sólo daremos el **HINT**: Usar el Teorema del Binomio y que $k^2 = k(k-1) + k$.

P7 Dados $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, calcule $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k}+1}$.

Solución: Veremos el caso $|a| \neq 1$, el otro caso queda propuesto.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{a^{2^k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k(a^{2^k}-1)}{a^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2^{k+1}-2^k)(a^{2^k}-1)}{a^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}a^{2^k}-2^{k+1}-2^ka^{2^k}+2^k}{a^{2^{k+1}}-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{-2^{k+1}+2^k(2a^{2^k}-a^{2^k}+1)}{a^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{-2^{k+1}+2^k(a^{2^k}+1)}{a^{2^{k+1}}-1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{-2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1}+\frac{2^k(a^{2^k}+1)}{(a^{2^k}-1)(a^{2^k}+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{-2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1}+\frac{2^k}{(a^{2^k}-1)}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1}-\frac{2^k}{(a^{2^k}-1)}=-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}+\frac{1}{a-1}$$

Donde hemos usado la propiedad telescópica de las sumatorias y varios trucos sucios para armar la telescópica, en particular usamos que $2^k=2^{k+1}-2^k$ (el cual es un buen truco, `:P`).