Algunos Ejercicios Resueltos de Ma11a para C2.

Algo más sobre Teoría de Grupos: los Subgrupos Normales.

Sea (G,$*$) un grupo.

Definición: Definimos para $g \in G$ y $H \subseteq G$ los siguientes conjuntos:

$$g * H = \{g * h : h \in H\}$$

$$H * g = \{h * g : h \in H\}$$

Los cuales son llamados traslación por la izquierda (respectivamente traslación por la derecha) de H en g.

Definición: H se dice subgrupo **normal** si H es subgrupo y se cumple, $\forall g \in G$, la siguiente igualdad de conjuntos:

$$g * H = H * g.$$

Obs: Notar que todo subgrupo de un grupo Abeliano es subgrupo normal.

Problema 1.

a) Dado H subgrupo de G, definimos la siguiente relación en G:

$$x \equiv_H y \Longleftrightarrow x * y^{-1} \in H$$

Demuestre que $\equiv_H$ es relación de equivalencia.

b) Sea $H \subseteq G$ subgrupo normal de G.

b.1) Pruebe que $*$ es compatible con $\equiv_H$, es decir, que

$$x_1 \equiv_H y_1 \wedge x_2 \equiv_H y_2 \Longrightarrow x_1 * x_2 \equiv_H y_1 * y_2.$$

b.2) Muestre que $[x]_{\equiv_H} = \{g \in G : \exists h \in H \ tq \ g = h * x\}$. Concluya que $[x]_{\equiv_H} = H * x = x * H$.

b.3) Se define en las clases de equivalencia de $\equiv_H$:

$$[x]_{\equiv_H} \triangle [y]_{\equiv_H} := [x * y]_{\equiv_H}.$$

Probar que la operación está bien definida como una lci en $G/H = \{[x]_{\equiv_H} : x \in G\}$.

b.4) Pruebe que $(G/H, \triangle)$ es un grupo (llamado grupo cuociente).

b.5) Probar que el neutro en $(G/H, \triangle)$ es H.

Solución:

a) Se deja como buen ejercicio de relaciones y de estructuras algebraicas (Hacerlo!!!).

b)

b.1) Sean $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2 \in G$ tq:

$$x_1 \equiv_H y_1 \wedge x_2 \equiv_H y_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 * y_1^{-1} \in H \ \wedge x_2 * y_2^{-1} \in H$$

$$\Leftrightarrow x_1 \in H * y_1 \ \wedge x_2 \in H * y_2$$

De la última equivalencia, como H es subgrupo normal, se tiene que $H * y_1 = y_1 * H$, y por lo tanto:

$$x_1 \equiv_H y_1 \wedge x_2 \equiv_H y_2 \Leftrightarrow x_1 \in y_1 * H \ \wedge x_2 \in H * y_2$$

Luego, la hipótesis nos dice que existen $h_1,\ h_2 \in H$ tal que $x_1 = y_1 * h_1,\ y\ x_2 = h_2 * y_2$.

Por otro lado, para ver que $*$ es compatible necesitamos verificar que:

$$x_1 * x_2 \equiv_H y_1 * y_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 * x_2) * (y_1 * y_2)^{-1} \in H$$

$$\Leftrightarrow (x_1 * x_2) \in H * (y_1 * y_2).$$

Basados en la última equivalencia, nos gustaría ver que $x_1 * x_2$ puede ser escrito como un elemento en $H * (y_1 * y_2)$. En efecto,

$$x_1 * x_2 = (y_1 * h_1) * (h_2 * y_2) = [y_1 * (h_1 * h_2)] * y_2$$

Donde hemos usado la hipotesis sobre x_1, y_1, y que $*$ es asociativa. Ahora, como $h_1 * h_2 \in H$, se concluye que $y_1 * (h_1 * h_2) \in y_1 * H$, y entonces usando que H es subgrupo normal deducimos que $\exists h \in H$ tq $y_1 * (h_1 * h_2) = h * y_1$. Con esto:

$$x_1 * x_2 = (h * y_1) * y_2 = h * (y_1 * y_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 * x_2) \in H * (y_1 * y_2).$$

Luego. hemos logrado probar que $x_1 * x_2 \equiv_H y_1 * y_2$, de donde se concluye que $*$ es compatible con $\equiv_H$.

b.2) En efecto,

$$[x]_{\equiv_H} = \{g \in G : x \equiv_H g\} = \{g \in G : g \equiv_H x\} = \{g \in G : g \in H{*}x\} = \{g \in G : \exists h \in H \; tq \; g = h{*}x\}.$$

La igualdades de conjuntos que aparecen aquí son verdaderas pues todas las proposiciones que definen los conjuntos involucrados son equivalentes. El resto de este ejercicio se deja propuesto fácil (Hacerlo!!!) .

b.3) Primero hay que verificar que efectivamente, al operar 2 elementos , el resultado es único (es decir que la definición de $\triangle$ nos da una función). Recordemos que los elementos en G/H son conjuntos. Observando la definición de $\triangle$ nos damos cuenta de que, via esta operación, a el conjunto que contiene a **x** operado con el conjunto que contienen a **y** le asignamos el conjunto que contiene a $x * y$. Luego, podría ocurrir que si en lugar de x e y se tomaran otros elementos de cada conjunto se obtuviera un resultado distinto... ¿¿puede ocurrir esto?? afortunadamente, la respuesta es negativa, y la razón es que $*$ es compatible con $\equiv_H$, pues ésta propiedad nos asegura que la clase de equivalencia de $[x * y]_{\equiv_H}$ NO cambia si en vez de **x** ponemos algún elemento relacionado con **x** y/o en vez de **y** ponemos algún elemento relacionado con **y**; en conclusión, no importa que elementos tomemos de cada clase de equivalencia, la operación $\triangle$ nos va a entregar siempre el mismo resultado, osea, es una función.

Para finalizar, debemos probar que $\triangle$ nos entrega como resultado un elemento en G/H, pero esto es trivial de la definición.

En conclusión, $\triangle$ es una lci en G/H.

b.4) **Asociatividad.** Sean $[x]_{\equiv_H}, [y]_{\equiv_H} y [z]_{\equiv_H} \in G/H$, veamos:

$$[x]_{\equiv_H} \triangle \left([y]_{\equiv_H} \triangle [z]_{\equiv_H}\right) = [x]_{\equiv_H} \triangle \left([(y * z)]_{\equiv_H}\right) = [x * (y * z)]_{\equiv_H}$$

$$= [(x * y) * z]_{\equiv_H} = \left([(x * y)]_{\equiv_H}\right) \triangle [z]_{\equiv_H} = \left([x]_{\equiv_H} \triangle [y]_{\equiv_H}\right) \triangle [z]_{\equiv_H}$$

Usamos que la operación $*$ era asociativa en G.

Existencia del neutro. Tenemos que buscar un elemento en G/H que pueda ser el neutro, ¿cómo lo hacemos? lo que se hace por lo general es observar cómo está definida la operación para la cual queremos el neutro; esto nos va a ser de ayuda para que podamos identificar y/o encontrar al neutro. En nuestro caso observamos que $\triangle$ está definida a partir de la operación $*$; estudiando la forma en que está definida se nos ocurre que lo más probable es que el neutro para $\triangle$ sea $[e]_{\equiv_H}$, donde estamos denotando e al neutro para $*$ en G. Una vez que ya tenemos elegido a nuestro posible candidato debemos verificar que ES el neutro, veámoslo a continuación, sea $[x]_{\equiv_H} \in G/H$:

$$[x]_{\equiv_H} \triangle [e]_{\equiv_H} = [x * e]_{\equiv_H} = [x]_{\equiv_H}$$

Análogamente,

$$[e]_{\equiv_H} \triangle [x]_{\equiv_H} = [e * x]_{\equiv_H} = [x]_{\equiv_H}$$

Con lo anterior hemos comprobado que $[e]_{\equiv_H}$ es el neutro para $\triangle$ en G/H.

Existencia de los inversos. Análogo a la parte anterior, es decir, hay que observar cómo está definida $\triangle$ para poder encontrar a los inversos de elementos en G/H.

b.5) Usemos que $[x]_{\equiv_H} = H * x$, lo que fue demostrado en la parte b.2 de este problema.

$$[e]_{\equiv_H} = H * e = H$$

Queda de tarea verificar, usando que e es el neutro en $(G, *)$, que efectivamente se cumple que $H * e = H$ (HINT: ver la igualdad como igualdad de conjuntos...).

Propuesto (NO fácil).

Sea H subgrupo de (G,$*$). Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) H es subgrupo normal de (G,$*$).

ii) $(\forall g \in G)(\forall h \in H)\ g * h * g^{-1} \in H$

iii) $(\forall g \in G)\ g * H * g^{-1} = H$

iv) $(\forall g \in G)(\forall h_1 \in H)(\exists h_2 \in H)$ tq $g * h_1 = h_2 * g$.

v) $*$ es compatible con $\equiv_H$.

Más Ejercicios Resueltos o Semi-Resueltos.

Problema 2.

Sea $(G, *)$ grupo, y H subgrupo de G.

a) Pruebe que si $g \in H$ entonces $g * H = H * g = H$.

b) Sean a y $b \in G$, muestre que $a * H \cap b * H \neq \emptyset \iff a * H = b * H$.

Solución:

a) Una de las igualdades que aquí aparecen fue hecha en clase auxiliar, la otra es totalmente análoga. (HINT: la igualdad se demuestra vía una doble inclusión).

b) ($\Leftarrow$) Basta probar que $\forall a \in G\ a * H \neq \emptyset$. En efecto, $a \in a * H$, pues el elemento neutro e de G está en H, o sea tenemos $a = a * e \in a * H$.
Finalmente, sabemos que $\forall A$ conjunto no vacío, $A \cap A \neq \emptyset$, de donde se concluye que $a * H \cap b * H \neq \emptyset$.

($\Rightarrow$) Por hipótesis $\exists h_a,\ h_b \in H$ tal que $a * h_a = b * h_b$, usemos este hecho para probar que $a * H = b * H$.

Veamos primero que $a*H \subseteq b*H$: sea $x \in a*H$, entonces $x = a*h$ para algún $h \in H$. Por la hipótesis y usando que G es grupo (en particular existe el inverso para todo elemento en G), podemos escribir $a = (b * h_b) * h_a^{-1}$. Con esto obtenemos:

$$x = [(b * h_b) * h_a^{-1}] * h = [b * (h_b * h_a^{-1})] * h = b * [(h_b * h_a^{-1}) * h]$$

Donde hemos usado la asociatividad de $*$. Recordando que H es subgrupo podemos decir que $(h_b * h_a^{-1}) * h \in H$, y en conclusión, por las igualdades anteriores, hemos logrado escribir x como un elemento de $b * H$, luego, $x \in b * H$. Esto prueba que $a * H \subseteq b * H$. La otra inclusión es análoga.

Finalmente, estas dos inclusiones prueban la igualdad pedida.

Problema 3.

Sean $m,\ n,\ r \in \mathbb{N}$ tq $r \leq m,\ r \leq n$. Calcule $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$.

HINT: usar el teorema del binomio y que $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$.

Solución:

Como $r \leq m,\ r \leq n$ podemos interpretar a $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$ como el coeficiente que acompaña a x^r en la siguiente multiplicación de binomios $(1+x)^m(1+x)^n$ (porque???).

Por otro lado, usando teorema del binomio sabemos que el coeficiente que acompaña a x^r en la potencia de binomio $(1+x)^{m+n}$ es $\binom{m+n}{r}$.

Luego, puesto que $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$, el coeficiente que acompaña a x^r en ambos productos debe ser el mismo, razón por la cual se concluye que:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Queda propuesto como buen ejercicio, el identificar a que suma corresponde el coeficiente $\binom{m+n}{r}$ cuando no se cumple que $r \leq m,\ r \leq n$.

Problema 4.

Sean p y q dos reales no negativos tal que $p + q = 1$. Calcule $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$.

Solución: Sólo daremos el **HINT**. Usar el Teorema del Binomio y que $k^2 = k(k-1) + k$.

Problema 5.

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, calcule $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k}+1}$.

Solución: Veremos el caso $|a| \neq 1$, el otro caso queda propuesto.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k(a^{2^k}-1)}{a^{2^{k+1}}-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2^{k+1}-2^k)(a^{2^k}-1)}{a^{2^{k+1}}-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}a^{2^k}-2^{k+1}-2^k a^{2^k}+2^k}{a^{2^{k+1}}-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{-2^{k+1}+2^k(2a^{2^k}-a^{2^k}+1)}{a^{2^{k+1}}-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-2^{k+1}+2^k(a^{2^k}+1)}{a^{2^{k+1}}-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1} + \frac{2^k(a^{2^k}+1)}{(a^{2^k}-1)(a^{2^k}+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{-2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1} + \frac{2^k}{(a^{2^k}-1)} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{a^{2^{k+1}}-1} - \frac{2^k}{(a^{2^k}-1)} = -\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1} + \frac{1}{a-1}$$

Donde hemos usado la propiedad telescópica de las sumatorias y varios trucos sucios para armar la telescópica, en particular usamos que $2^k = 2^{k+1} - 2^k$ (el cual es un buen truco, :P).

The End

`Diego A. Morán R.`