Ejercicios Resueltos 2 / Algebra / 2008

Profesora: María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

$\boxed{\text{P1}}$ Sean $a \in \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto numerable. Pruebe que el conjunto

$$A_{a,B} = \{a + b \in \mathbb{R} \ / \ b \in B\}$$

es un conjunto numerable.

Sol: Tenemos por lo menos 4 formas de probar que $A_{a,B}$ es numerable:

- $*_1$ Encontrar una función **biyectiva** entre $A_{a,B}$ y algún conjunto **numerable** que se nos ocurra (por ejemplo pueden ser: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$, *etc*, y en este caso particular, B).
- $*_2$ Encontrar una función **biyectiva** entre algún conjunto **numerable** que se nos ocurra y $A_{a,B}$.
- $*_3$ Verificar que $A_{a,B}$ es un conjunto **infinito** (o sea que no es finito...) y encontrar alguna función **inyectiva** entre $A_{a,B}$ y algún conjunto numerable.
- $*_4$ Verificar que $A_{a,B}$ es un conjunto **infinito** y que $A_{a,B}$ es **subconjunto** de algún conjunto **numerable**.
- $*_5$ Escribir $A_{a,B}$ como una unión de conjuntos finitos o numerables.

OBS: De las propiedades anteriores, vemos que la ventaja de demostrar que algo tiene cardinalidad numerable, es que sólo nos basta encontrar una función **inyectiva**, lo que puede ser mucho más fácil que encontrar una función **biyectiva**.

En este tipo de ejercicios, lo más difícil es encontrar el conjunto numerable y la función (inyectiva o biyectiva) que necesitamos para probar la numerabilidad; ésto depende mucho del problema particular que estemos resolviendo. El consejo es observar bien el conjunto que queremos probar que es numerable y pensar que conjunto numerable le podemos relacionar.

Nosotros queremos probar que $A_{a,B}$ es numerable. Si lo estudiamos un poco, nos damos cuenta de que sus elementos pueden ser tanto racionales como irracionales; luego no podríamos decir, por ejemplo, que $A_{a,B} \subseteq \mathbb{Q}$ (osea no podríamos usar $*_4$ con el numerable $\mathbb{Q}$), se podría decir que $\mathbb{Q}$ no es el conjunto adecuado para relacionarlo con $A_{a,B}$. Seguimos buscando...

Nos damos cuenta de que un conjunto numerable que se relaciona mucho con $A_{a,B}$ es el conjunto B, pues $A_{a,B}$ se define a partir de B. ¿Podemos decir que $A_{a,B} \subseteq B$? En general, NO (esto depende mucho de lo que sean a y B); o sea no podríamos ocupar $*_4$ con $B\ldots$

Mejor intentemos encontrar una función entre $A_{a,B}$ y B[1].

IDEA para encontrar la función: los elementos de B son como los elementos de $A_{a,B}$ menos el número a. O sea, dado un elemento en $A_{a,B}$, para transformalo en uno de B hay que restarle a.

Se nos ocurre la siguiente función[2]:

$$f : A_{a,B} \to B$$

$$f(x) = x - a$$

¿Está bien definida como función? Si, pues a cada $x \in A_{a,B}$ le asigna una sóla imagen $f(x)$ y además esta imagen efectivamente es un elemento del conjunto de llegada B (Ejercicio: Verificarlo!!!).

Se tiene lo siguiente:

- Esta función es inyectiva (Ejercicio).
- El conjunto $A_{a,B}$ es infinito, pues

  $$A_{a,B} = \{a + \textit{primer elemento de } B,\ a + \textit{segundo elemento de } B\ \ldots$$

  y como B es infinito se concluye.

Luego, usando $*_3$ concluimos que $A_{a,B}$ es numerable.

OBS: En este caso la función que encontramos también es epiyectiva, luego podríamos haber usado $*_1$, ya que tendríamos $f : A_{a,B} \to B$ **biyectiva** o, equivalentemente, $|A_{a,B}| = |B|$, `:D`.

[1] La resolución del ejercicio comienza en esta línea; el resto eran recuerdos de la materia y posibles ideas de como resolver el problema, :).

[2] Hay que probar que es función, es decir, ver que está bien definida

$\boxed{\text{P2}}$ Pruebe que el conjunto

$$\mathcal{P} = \{m^n \ : \ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}\}$$

es numerable.

Sol: **Primera forma:** Usaremos $*_4$.

- Veamos que $\mathcal{P}$ es infinito.

  En efecto, $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}$, pues dado $k \in \mathbb{N}$ para ver que $k \in \mathcal{P}$ basta tomar $m = k$ y $n = 1$ en la definición del conjunto $\mathcal{P}$ (claramente $k \in \mathbb{N}$ y $1 \in \mathbb{Z}$).

  Luego, como $\mathcal{P}$ contiene a los naturales no puede ser un conjunto finito, en otras palabras $\mathcal{P}$ es infinito.

- Probemos que $\mathcal{P}$ está contenido en algún conjunto numerable que conozcamos. Observando con cuidado los elementos de $\mathcal{P}$, nos damos cuenta de que son o números naturales o fracciones (números racionales), por lo tanto $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{Q}$. Y como sabemos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable, estamos listos.

En conclusión, por los 2 pasos anteriores, concluimos que $\mathcal{P}$ es numerable.

Segunda forma: Usaremos $*_5$.

No es tan difícil[3], darse cuenta de que:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_n$$

Con $\mathcal{P}_n = \{m^n \ : \ m\ in \mathbb{N}\}$.

Estos conjuntos $\mathcal{P}_n$ son numerables (propuesto[4]).

Luego, como $\mathbb{Z}$ es un conjunto numerable (cátedra), hemos logrado escribir $\mathcal{P}$ como *unión numerable de conjuntos numerables*, que es numerable, por una de las tantas propiedades vistas en cátedra.

Así, $\mathcal{P}$ es un conjunto numerable.

`Suerte en el control!!!!`

The End

[3]después de pensarlo media hora...

[4]Use $*4$.