ANEXO CLASE 24-05-2004

Al final de la clase auxiliar extra uno de ustedes me pidió ayuda con el problema siguiente:

PROBLEMA: dados $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k}+1}$$

SOLUCIÓN: el caso $a = \pm 1$ es trivial, así que supondremos $a \neq \pm 1$. Para ese caso probaremos por inducción sobre n que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k}+1} = \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1-a}$$

- **Caso $n = 0$:**

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k}+1} = \sum_{k=0}^{0} \frac{2^k}{a^{2^k}+1} = \frac{2^0}{a^{2^0}+1} = \frac{1}{a+1}$$

  Por otro lado, tenemos:

  $$\begin{aligned}
  \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1-a} &= \frac{2^1}{1-a^{2^1}} - \frac{1}{1-a} \\
  &= \frac{2}{1-a^2} - \frac{1}{1-a} \\
  &= \frac{2}{(1+a)(1-a)} - \frac{1+a}{(1+a)(1-a)} \\
  &= \frac{2-1-a}{(1+a)(1-a)} = \frac{1}{1+a}
  \end{aligned}$$

  Luego, para $n = 0$ se cumple la igualdad.

- **Paso inductivo:** suponemos la propiedad cierta para $n-1$ y la demostramos para n.

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k}+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{a^{2^k}+1} + \sum_{k=n}^{n} \frac{2^k}{a^{2^k}+1}$$

$$
\begin{aligned}
& = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{a^{2^k}+1} + \frac{2^n}{a^{2^n}+1} \\
\text{Hipótesis de inducción} \Rightarrow \quad & = \frac{2^n}{1-a^{2^n}} - \frac{1}{1-a} + \frac{2^n}{a^{2^n}+1} \\
& = \frac{2^n(a^{2^n}+1) + 2^n(1-a^{2^n})}{(1-a^{2^n})(a^{2^n}+1)} - \frac{1}{1-a} \\
\text{Suma por diferencia} \Rightarrow \quad & = \frac{2^n + 2^n}{1-(a^{2^n})^2} - \frac{1}{1-a} \\
& = \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1-a}
\end{aligned}
$$

Lo cual concluye con la inducción.

$\blacksquare$

NOTA: si tuviera más tiempo también habría explicado cómo se me ocurrió cuánto valía la sumatoria inicial. Sólo les digo que me demoré bastante en descubrirlo.

Roberto Amaru Cortez Milán