Auxliar MA11A-01 Viernes 07/05/2004

Nota: En la auxiliar del Viernes hubo un **pequeño "error"** en la resolución del último problema (el de inducción). Por esa razón les escribí la "buena solución", para consulta del público en general...Aquí se viene:

Problema (Version 2.0).

Sean $a, b \in R$, $\quad (a+b) > 0$, $a \neq b$. Muestre que para $n \geq 2$, $\quad (a+b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

Solución.

La demostración se hará por inducción en n.

Caso Base ($n = 2$):

Es sabido de **MA12A** que: $\qquad 2ab < (a^2 + b^2)$, si $a \neq b$.
Con esto,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab < 2(a^2 + b^2) = 2^{2-1}(a^2 + b^2)$$

Por lo tanto, la proposición es válida para n=2.

Paso inductivo:

H.I.: Suponemos que $(a+b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

PDQ: $(a+b)^{n+1} < 2^{(n+1)-1}(a^{n+1} + b^{n+1})$.

Tenemos, por **H.I.**:

$$(a+b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n)$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad por $(a+b)$ y recordando que $(a+b) > 0$, nos queda :

$$(a+b)^{n+1} < 2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b)$$

Desarrollando el lado derecho obtenemos:

$$(a+b)^{n+1} < 2^{n-1}(a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b + b^n a) \qquad (**)$$

A continuación veremos que:

$$(a^n b + b^n a) < a^{n+1} + b^{n+1} \qquad (*)$$

Supondremos para ello que $a < b$, [el único otro caso $(a > b)$ se prueba en forma análoga].

$$(*) \quad \iff a^n(b-a) < b^n(b-a) \iff \quad a^n < b^n$$

Lo anterior es válido, pues $(b-a) > 0$.

El "error"en la clase auxiliar, fue decir que:

$$a^n < b^n \iff \quad a < b$$

equivalencia que se cumple si $a, b > 0$. Pero nosotros sólo sabemos que $(a + b) > 0$, o sea a o b podrían ser negativos ; veamos que de todas maneras en este caso la equivalencia es válida.

Si $0 < a < b$ estamos listos. Supondremos entonces que $a < 0, a < b$:

Si n es impar, claramente: $a < 0 < b \iff \quad a^n < 0 < b^n$.

Si n es par, sabemos que $0 < (a + b) \iff \quad |a| = -a < b \iff \quad |a|^n = (-a)^n < b^n$

Luego, $a < b \Longrightarrow (-a)^n = |a|^n < b^n$. (obs: ésta es la implicancia que NO se cumple (necesariamente) para $a < 0$).

Recíprocamente, $a^n < b^n \Longrightarrow a < b$, tomando para a la raíz **negativa** (pues sabemos que $a < 0$).

En conclusión, (*) es verdadera.

Retomemos el paso inductivo, ocupando (*) en (**) nos queda:

$$(a + b)^{n+1} < 2^{n-1}(a^{n+1} + b^{n+1} + a^{n+1} + b^{n+1}) = 2^{(n+1)-1}(a^{n+1} + b^{n+1})$$

Con esto probamos el paso inductivo, luego hemos probado por inducción que:

$$n \geq 2, \quad (a + b)^n < 2^{n-1}(a^n + b^n)$$

OBS:

1. Como se pudo ver más que un error, fue una solución incompleta.
2. El problema era más de **MA12A** que de **MA11A**, aunque igual les sirve para aclarar ideas sobre inducción.
3. Como dato Freak también se cumple: $(a + b)^p < 2^{p-1}(a^p + b^p)$. para $1 \leq p < \infty$, con $p \in R$.
4. Para el que le interese escribir documentos más presentables que en Word, esto fue escrito en $\LaTeX$, versión Windows (Miktex).
5. Cualquier error, comentario, dudas etc, dirigirse al mail, o al foro del curso.

The End

Diego A. Morán R.