Ejercicios Resueltos 1 / Algebra / 2008

Profesora: María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

A continuación veremos un ejemplo de un tipo de problemas de *inducción*, los de divisibilidad. Lo resolveremos de varias formas.

P1 Demuestre que $\forall n \geq 1 \quad 3^{2n} - 1$ es divisible por 8.

Sol: Haremos la demostración por inducción.

Llamenos $P(n) : \forall n \geq 1 \quad 3^{2n} - 1$ *es divisible por* 8

- **Caso Base:** Hay que ver que la propiedad es cierta para $n = 1$ (osea ver que $P(1)$ es cierto). En efecto,

$$3^{2 \cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8$$

  Y como 8 es divisible por 8 , la propiedad es cierta para $n = 1$.

- **Paso Inductivo:** Hay que probar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
  Suponemos entonces que $P(n)$ es cierta (H.I.). Veremos 3 formas de probar que $P(n+1)$ también lo es:

F1: Calculemos:

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2n} \cdot (8+1) - 1 = 3^2 n \cdot 8 + 3^{2n} \cdot 1 - 1$$

$$\Rightarrow 3^{2(n+1)} - 1 = 3^2 n \cdot 8 + \left[3^{2n} \cdot 1 - 1\right]$$

luego, usando la (H.I.) concluimos que $3^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 8, por ser suma de números divisibles por 8.

F2: La (H.I.) nos dice que $\exists k \in I\!N$ tal que $3^{2n} - 1 = 8k$, o equivalentemente $3^{2n} = 8k + 1$. Usemos esto para probar $P(n+1)$.

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = (8k+1) \cdot 9 - 1$$

$$\Rightarrow 3^{2(n+1)} - 1 = 72k + 9 - 1 = 72k + 8 = 8(9k+1)$$

Como $(9k+1) \in I\!N$, entonces concluimos que $3^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 8.

F3: Usaremos la siguiente propiedad:

$$q \mid p \ \wedge \ q \mid (r - p) \Rightarrow q \mid r$$

Nosotros tenemos, por (H.I.), $8 \mid (3^{2n} - 1)$, luego para probar que $8 \mid 3^{2(n+1)} - 1$, nos basta ver que $8 \mid \ \left[(3^{2(n+1)} - 1) - (3^{2n} - 1)\right]$. En efecto,

$$(3^{2(n+1)} - 1) - (3^{2n} - 1) = 3^{2n+2} - 3^{2n} = 3^{2n} \cdot (9-1) = 3^{2n} \cdot 8$$

Por lo tanto, $8 \mid \left[(3^{2(n+1)} - 1) - (3^{2n} - 1)\right]$.
Lo que prueba que $3^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 8.

OBS: $p \mid q$ significa *p divide a q*, o equivalentemente, *q es divisible por p*.

Así hemos verificado que el **Caso base** y el **Paso Inductivo** son ciertos, lo que termina la prueba por inducción. Se concluye que la proposición $P(n)$ es cierta $\forall n \geq 1$.

Muchas veces, para probar una proposición $P(n)$, es mucho más sencillo si usamos la *segunda forma del principio de inducción.* Veamos un ejemplo:

$\boxed{\text{P2}}$ Pruebe que todo $n \in I\!N$, con $n \geq 2$, es un número *primo* o es producto de números primos.

Sol:

- **Caso Base:** Veamos si la propiedad es cierta para $n = 2$. Como 2 es un número primo, entonces concluimos que la propiedad es cierta.

- **Paso Inductivo:** supongamos que $\forall k \in \{2,\ 3, \ldots,\ n\}$ se cumple k es primo o producto de primos (H.I.). Debemos probar que (n+1) es primo o producto de primos.

  Caso 1: Si (n+1) es primo, estamos listos[1].

  Caso 2: (n+1) no es primo, entonces podemos decir que

  $$\exists p,\ q \in I\!N \ \textit{con}\ n+1 > p > 1,\ n+1 > q > 1 \ \textit{tal que}$$

  $$(n+1) = p \cdot q$$

  lo anterior es cierto pues como (n+1) no es primo, entonces posee al menos 2 divisores distintos de 1 y (n+1); además hay que recordar que si m es divisor de l entonces $1 \leq m \leq l$.

  Luego,

  Como $2 \leq p \leq n$, podemos decir, por (H.I.), que p es primo o producto de primos.

  Como $2 \leq q \leq n$, podemos decir, por (H.I.), que q es primo o producto de primos.

  Usando esto último y que $(n+1) = p \cdot q$ se concluye que (n+1) es producto de primos[2].

Asi, como el **caso base** y el **paso inductivo** son ciertos, hemos terminado la demostración por inducción de que todo número natural $n \geq 2$ es primo o producto de primos.

[1] O sea, no hay nada que probar...
[2] Producto de producto de primos es producto de primos...

A continuación, un ejercicio atípico de Imagen y PreImagen. Recuerden que esta materia va a ser evaluada en el control y vale la pena recordarla.

P3 Sea $f : E \to F$ una función. Pruebe que:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow [(\forall B \subseteq E)\ f(B^c) = (f(B))^c]$$

Sol: Como debemos demostrar un $\Leftrightarrow$, demostraremos la implicancia para ambos lados. Primero de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda.

$\Rightarrow$ Usando como hipótesis que f es biyectiva debemos probar que $(\forall B \subseteq E)\ f(B^c) = (f(B))^c$. Para ellos consideramos un $B \subseteq E$ cualquiera y trataremos de demostrar dos cosas[3]: $f(B^c) \subseteq (f(B))^c$ y $f(B^c) \supseteq (f(B))^c$.

$\subseteq$ Sea $y \in f(B^c)$. Por definición de conjunto Imagen podemos decir que:

$$(\exists x \in B^c)\ f(x) = y$$

Por inyectividad de f podemos decir que:

$$\overline{(\exists \widehat{x} \in B)\ f(\widehat{x}) = y}$$

(Ya que si existiera un $\widehat{x} \in B$ tal que $f(\widehat{x}) = y$ tendríamos que $f(x) = f(\widehat{x}) = y$, usando la inyectividad de f podríamos decir que: $x = \widehat{x}$. Lo cual es una contradicción, ya que $x \in B^c \wedge \widehat{x} \in B$).

Luego, dándonos cuenta que lo que está dentro de la negación no es más que una forma retorcida de la definición de Imagen, se tiene que:

$$\overline{y \in f(B)}$$

Lo cual es lo mismo a decir que $y \in f(B)^c$. Justamente lo que queríamos probar.

$\supseteq$ Sea $y \in f(B)^c$. Usando definición de complemento y luego la definición de Imagen se tiene:

$$y \in f(B)^c \Leftrightarrow \overline{y \in f(B)} \Leftrightarrow \overline{(\exists x \in B)\ f(x) = y}$$

Como f es epiyectiva se tiene que $(\forall y \in F)\ (\exists a \in E)\ f(a) = y$. En otras palabras, se nos asegura que para todo $y \in F$ encontraremos un $a \in E$ tal que $f(a) = y$. Si ese a no está en B (como lo asegura $\overline{(\exists x \in B)\ f(x) = y}$) entonces ese a debe[4] estar en B^c .
Por lo tanto:

$$(\exists a \in B^c)\ f(a) = y \Leftrightarrow y \in f(B^c)$$

Que es justamente lo que queríamos.

Luego concluimos que $f(B^c) = (f(B))^c$.

[3]Nos aprovecharemos de la propiedad antisimétrica de los conjuntos: $A \subseteq C \wedge C \subseteq A \Leftrightarrow A = C$
[4]Recuerde que $E = B \cup B^c$

$\Leftarrow$ Ahora debemos probar la implicancia hacia la izquierda, osea:

$$[(\forall B \subseteq E)\ f(B^c) = (f(B))^c] \Rightarrow f \textit{ es biyectiva}$$

Usaremos como hipótesis que $(\forall B \subseteq E)\ f(B^c) = (f(B))^c$ y trataremos demostrar que f es inyectiva y epiyectiva.

Inyectividad Debemos probar que para todo $x_1, x_2 \in E$ se tiene que:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Para ello[5] tomemos $x_1 \neq x_2$ y $B = \{x_1\}$.

Notemos que $x_2 \in B^c$ (ya que $B = \{x_1\}$ y $x_1 \neq x_2$).

Luego , gracias a la definición de conjunto Imagen, tenemos que:

$$f(x_2) \in f(B^c)$$

pero $f(B^c) = (f(B))^c$ (por hipótesis).

$$\Rightarrow f(x_2) \in (f(B))^c \Leftrightarrow f(x_2) \notin (f(B))$$

Pero $f(B) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$.

Por lo tanto $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Epiyectividad Usando la hipótesis tomando $B = \phi$ se tiene que:

$$f(\phi^c) = (f(\phi))^c$$

Y en este momento es cuando una pregunta importante debe dominar nuestra mente: ¿Complemento con respecto a qué?.

La función f va de E en F. Como el conjunto Imagen se define sobre subconjuntos del dominio (en este caso el dominio es E) se tiene que $f(\phi^c) = f(E)$.

Por otro lado, sabemos que los conjuntos imagen viven en las partes de F (en otras palabras, todos los conjuntos imagen son subconjuntos del recorrido). Por lo tanto $(f(\phi))^c = \phi^c = F$.

Luego de esta salvedad podemos ver que:

$$f(\phi^c) = (f(\phi))^c \Leftrightarrow f(E) = F$$

Usando la definición del conjunto Imagen:

$$\Leftrightarrow (\forall y \in F)\ (\exists x \in E)\ f(x) = y$$

Que es lo mismo que decir que f es epiyectiva.

Por lo tanto f es biyectiva. Lo que completa nuestra demostración.

[5] Y para que nuestra hipótesis sirva de algo

Por último un ejercicio de sumatorias.

$\boxed{\text{P4}}$ Demuestre que:

$$\sum_{k=0}^{7}[(\sqrt{3})^{7-k}(\sqrt{2})^{k}] = 65(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Sol: Este ejercicio parece estar pintado para ocupar el Teorema del Binomio de Newton[6], sin embargo ocuparlo es justamente lo que no hay que hacer. Luego de intentar de muchas maneras formar el Binomio de Newton, uno se da cuenta que el camino va por otro lado.

$$\sum_{k=0}^{7}[(\sqrt{3})^{7-k}(\sqrt{2})^{k}] = \sum_{k=0}^{7}[(\sqrt{3})^{7}(\sqrt{3})^{-k}(\sqrt{2})^{k}] = \sum_{k=0}^{7}[(\sqrt{3})^{7}(\sqrt{\frac{2}{3}})^{k}]$$

Notemos que $(\sqrt{3})^7$ no depende del índice de la sumatoria (k), por lo que podemos tomarlo como constante y colocarlo afuera:

$$= (\sqrt{3})^{7}\sum_{k=0}^{7}[(\sqrt{\frac{2}{3}})^{k}]$$

Y ahora no es más que ocupar la suma geométrica!!

$$= (\sqrt{3})^{7}\frac{1-(\sqrt{\frac{2}{3}})^{8}}{1-(\sqrt{\frac{2}{3}})}$$

El resto es mera *álgebra*, así que lo vamos a hacer rapidito[7].

$$= 65(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

`Suerte en el control!!!!`

The End

[6]Recuerde que el Binomio de Newton es tan hermoso como la Venus de Milo
[7]Aunque se contradiga con el nombre del ramo