Soluciones de Problemas / Algebra / Tercera Sesión

Profesora: María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

$\boxed{\textbf{P3}}$ **(Semana 03 - Pag 49)**

Solución:

a) Sea $X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

$$\begin{aligned}
f\left(f(X)\right) &= f\left(A \cap (B \cup X)\right) \\
&= A \cap \left[B \cup (A \cap (B \cup X))\right] \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap A \cap (B \cup X)) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap (B \cup X)) \\
&= (A \cap B) \cup ((A \cap B) \cup (A \cap X)) \\
&= ((A \cap B) \cup (A \cap B)) \cup (A \cap X) \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap X) \\
&= A \cap (B \cup X) \\
&= f(X)
\end{aligned}$$

b) **Forma 1:**

Por contrarecíproca. Demostraremos que:

$$f \ \textit{inyectiva} \ \Rightarrow \ A = \mathcal{U} \ \wedge \ B = \phi$$

Asumamos que f es inyectiva. Que f sea inyectiva significa que para todo par de conjuntos X_1, X_2 si se llegase a tener que $f(X_1) = f(X_2)$ entonces obligadamente $X_1 = X_2$.

Notemos que $f(B) = A \cap (B \cup B) = A \cap B = A \cap (B \cup \phi) = f(\phi)$. Luego por inyectividad se tiene que $B = \phi$.

Por otro lado $f(A) = A \cap (B \cup A) = A = A \cap (B \cup \mathcal{U}) = f(\mathcal{U})$, luego por inyectividad $A = \mathcal{U}$.

Forma 2:

Probaremos directamente que:

$$A \neq \mathcal{U} \ \vee \ B \neq \phi \Rightarrow \ f \ \textit{no es inyectiva}$$

Como en la hípótesis aparece una disyunción, para demostrar esta implicancia, debemos probar que, en cualquiera de los 2 casos, f no es inyectiva.

Caso 1: Cuando $A \neq \mathcal{U}$. Para ver que f no es inyectiva basta encontrar 2 elementos en $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ de que tengan la misma imagen.

Calculemos:

$$f(A) = A \cap (B \cup A) = A$$

y por otro lado:

$$f(\mathcal{U}) = A \cap (B \cup \mathcal{U}) = A$$

Luego, como esto nos dice que A y $\mathcal{U}$ tienen la misma imagen y, además, estamos suponiendo que $A \neq \mathcal{U}$ (es el Caso 1), concluimos que f no puede ser inyectiva.

Caso 2: Cuando $B \neq \phi$. Queda propuesto. Hágalo de ejercicio!!!

c) Esto lo demostraremos por contradicción. Supongamos que $A \neq \mathcal{U}$ y que f es sobreyectiva.

Que f sea sobreyectiva significa que para cualquier conjunto Y, existe un conjunto X tal que $f(X) = Y$. Luego, independientemente lo que sea A^c, sabemos que existe un X tal que:

$$A^c = f(X) \;\Leftrightarrow\; A^c = A \cap (B \cup X)$$

Como $A \cap (B \cup X) \subseteq A$, se tiene que:

$$A^c \subseteq A$$

Lo que es una contradicción ya que $A \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\textbf{P2}}$ **(Semana 03 - Pag 49)**

Solución:

Dados $y \in I\!R$ y $x \in I\!R \setminus \{2\}$, podemos decir que:

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)y = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(y-2) = 2y+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2y+1}{y-2} \quad (1) \end{aligned}$$

La ecuación (1) será fundamental en el desarrollo del problema.

a) Nos piden probar que $f(I\!R \setminus \{2\}) = I\!R \setminus \{2\}$.

Demostraremos la igualdad como una doble inclusión:

$\subseteq$ Basta probar que $2 \notin f(I\!R \setminus \{2\})$.
En efecto, por la ecuación (1), de existir un $x \in I\!R \setminus \{2\}$ tal que $f(x) = 2$ se tendría que

$$x = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2-2}$$

Lo que es una contradicción, pues x es un número y la fórmula que aparece al lado derecho de la igualdad no está definida (no existe, no es un número.

Por lo tanto, $2 \notin f(I\!R \setminus \{2\})$.

$\supseteq$ tomemos un $y \in I\!R \setminus \{2\}$, hay que ver que existe $x \in I\!R \setminus \{2\}$ tal que $f(x) = y$.
De nuevo, por (1) el x candidato a cumplir con $f(x) = y$ es:

$$x = \frac{2y+1}{y-2}$$

Notar que como la fórmula está definida, pues $y \in I\!R \setminus \{\backslash\{2\}$, ie, el lado derecho de la igualdad *es* un número.

Para terminar, nos falta ver que efectivamente el x encontrado anteriormente pertenezca al dominio de la función, o sea, $x \in I\!R \setminus \{\backslash\{2\}$ Veamos, si $x = 2$, de la ecuación (1) se obtiene:

$$2(y-2) = 2y+1 \Leftrightarrow -4 = 1$$

Que es una contradicción. Luego, $x \in I\!R \setminus \{\backslash\{2\}$

Así, dado $y \in I\!R \setminus \{2\}$, cualquiera, hemos encontrado $x \in I\!R \setminus \{2\}$ tal que $f(x) = y$.

De lo anterior,

$$f(\mathbb{R} \setminus \{2\}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b) Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.
Denotemos $y = f(x_1) = f(x_2)$.
Usando la ecuación (1), no es tan difícil darse cuenta de que:

$$x_1 = \frac{2f(x_1)+1}{f(x_1)-2} = \frac{2y+1}{y-2} = \frac{2f(x_2)+1}{f(x_2)-2} = x_2$$

Así, se concluye que f es inyectiva.

c) Para hacer esta parte hay que notar que $g = f$ siempre que estemos considerando elementos en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ al aplicar g.

Usando la observación anterior, que nos permite reemplazar g por f cuando estamos en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, que g sea epiyectiva se deduce de que:

$$g(\mathbb{R} \setminus \{2\}) = f(\mathbb{R} \setminus \{2\}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Ahora, para ver que g es inyectiva, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

De la última igualdad se deduce que $x_1 = x_2$, pues ya probamos, en la parte *b*) que f es una función inyectiva. Así, concluimos que g es una función inyectiva.

Para encontrar la inversa, hay que notar que, dado $y \in \setminus\{2\}$:

$$\begin{aligned} y = g(x) &\Leftrightarrow (x-2)y = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow x(y-2) = 2y+1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-2} \quad (2) \end{aligned}$$

Intercambiando los roles de x e y en (2):

$$y = \frac{2x+1}{x-2}$$

De donde se obtiene la inversa:

$$g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$