Soluciones de Problemas / Algebra / Primera Sesión

Profesora: María Leonor Varas (Sección 4)
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P4 **(Semana 02 - Pag 35)**

Antes de la resolución del problema demostraremos una propiedad (que le puede servir en su futuro).

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

Para ellos tomaremos un X que vive en $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ y trataremos de demostrar que eso **equivale** a que el X vive en $\mathcal{P}(A \cap B)$

Sea $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Por definición de intersección sabemos que eso equivale a que $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$. Como el conjunto de partes es el conjunto de todos los subconjuntos, podemos decir que lo anterior equivale a que $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$. Por un razonamiento lógico que demostraremos en un ratito más podemos decir que lo anterior es equivalente a $X \subseteq A \cap B$. Y por último notemos que eso significa que $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

El **paso mágico** fue el siguiente:

$$X \subseteq A \wedge X \subseteq B \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

Eso lo podemos escribir con lógica de esta manera:

$$(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in A) \wedge (\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in A \wedge x \in B)$$

Considerando $p(x) : x \in X$, $q(x) : x \in A$ y $r(x) : x \in B$

$$[(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (\forall x)(p(x) \Rightarrow r(x))] \Leftrightarrow [(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x))]$$

Lo cual se es sencillo de demostrar. Usamos las **propiedades descritas en las páginas 6 y 7** del apunte para decir que lo anterior es equivalente a:

$$(\forall x)\left[(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (p(x) \Rightarrow r(x))\right] \Leftrightarrow (\forall x)\left[p(x) \Rightarrow q(x) \wedge r(x)\right]$$

Y ya tenemos derecho a olvidarnos un momento del cuantificador:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$$

Lo cual se demuestra con **mera álgebra**:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r) \Leftrightarrow \overline{p} \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$$

Luego de esta **pequeña introducción** vamos con el problema que nos convoca:

$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\}$$

Demostración:

$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(\phi)$$

(Lo anterior debe ser capaz de demostrarlo solito(a)...). Luego, como el único subconjunto del vacío es el vacío:

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}(A \cap B) = \{\phi\}$$

Y por último usamos la propiedad que demostramos al principio:

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\}$$

Suerte el sábado!