

Soluciones de Problemas / Algebra / Primera Sesión

Profesora: María Leonor Varas (Sección 4)

Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P3 (Semana 01 - Pag 16)

a) Neguemos r :

$$\bar{r} \Leftrightarrow \overline{(\forall x)(p(x) \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{(p(x) \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{(p(x) \wedge \bar{q})} \Leftrightarrow (\exists x)(\overline{p(x)} \vee q) \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \wedge \bar{q})$$

Ahora neguemos s :

$$\bar{s} \Leftrightarrow \overline{((\forall x)p(x)) \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{((\forall x)p(x))} \vee q \Leftrightarrow \overline{((\forall x)p(x))} \wedge \bar{q} \Leftrightarrow ((\forall x)p(x)) \wedge \bar{q}$$

b) Vamos a demostrar primero que $r \Rightarrow s$

Nuestra **hipótesis** es: $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q)$

Y lo que queremos demostrar es: $((\forall x)p(x)) \Rightarrow q$

Demostración: Supongamos que para todo x se tiene p (deberíamos ser capaces de asegurar que se cumple q). Sea un x cualquiera. Como sabemos se tiene $p(x)$ podemos implicar directamente que se tiene q gracias a la hipótesis (dice que para todo x , si se llegase a cumplir p entonces se tiene q).

Ahora debemos ver que pasa con $s \Rightarrow r$. Luego de meditarlo un rato nos damos cuenta que aquella **implicancia es falsa**. ¿Cómo lo demostramos? A través de un **contraejemplo**!

Lo que haremos es encontrar un ejemplo que destruya la implicancia, es decir, encontraremos $p(x)$ y q tales que $s \Rightarrow r$ sea falso.

Un ejemplo que sive (trabajando con x reales) es: $p(x) : x > 3$ y q cualquier frase que sea siempre falsa (como por ejemplo: *Los Auxiliares son mala onda*). Con esas proposiciones se tiene s verdadera y r falsa, lo que nos lleva inmediatamente a que $s \Rightarrow r$ es falso (de hecho es la única manera de que **la implicancia sea falsa**).

PBONUS (Semana 01)

Si U es el conjunto universo y $A \subseteq U$, demuestre que

$$[(\forall B \subseteq U) A \cup B = B] \Rightarrow A = \phi$$

Solución:

Lo primero es entender qué cosa es lo que tenemos que hacer, en este caso debemos demostrar una implicancia, o sea, debemos suponer cierto el lado izquierdo de la implicancia (será nuestra hipótesis!) y probar que el lado derecho es cierto.

En otras palabras, debemos asumir como cierto, como verdad, como dato, etc. que la proposición

$$[(\forall B \subseteq U) A \cup B = B]$$

es cierta, y usando esa información, debemos concluir que

$$A = \phi$$

Intentemos hacer esto entonces, el primer paso es entender bien la hipótesis (¿qué información nos dice? ¿cómo podemos usarla para concluir?, etc). Interpretemos (hay que pensar un poco en este paso)... La proposición nos dice, en español común y silvestre, que:

“Para cualquier conjunto B que uno elija dentro del universo U la siguiente igualdad se cumple: $A \cup B = B$ ”

Para entender mejor qué significa esto, pensemos en un ejemplo, cuando $U = \mathbb{N}$. En este caso, si la propiedad es cierta podemos decir que:

$$A \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7\}, A \cup \{17\} = \{17\}, A \cup \{\text{Numeros Pares}\} = \{\text{Numeros Pares}\}, \text{etc.}$$

Volvamos al problema. ¿Qué conjunto $B \subseteq U$ se nos ocurre tomar para poder concluir $A = \phi$? Como se tendrá $A \cup B = B$, y queremos que $A = \phi$ lo más probable es que usar la propiedad con $B = \phi$ no sea útil, pues así podemos relacionar A con el conjunto ϕ . Hagamos esto y veamos que pasa:

$$A \cup \phi = \phi \Leftrightarrow A = \phi$$

El porqué de esta última equivalencia es que usamos la propiedad: $A \cup \phi = A$ (“si a un conjunto le agrego el vacío, me queda el mismo conjunto”).

Estamos listos!!! (aunque parezca magia) pues hemos probado lo que nos pedían, ie, que $A = \phi$.

P1 (Semana 02 - Pag 35)

Solución:

a) Parte 1: Es trivial. Utilice las propiedades básicas de conjuntos: Leyes de Morgan, conmutatividades, asociatividades, etc.

Parte 2: *HINT*: Use la parte anterior, modifique la expresión usando las propiedades de conjuntos y finalmente ocupe que $A \cap D \subseteq A$ para concluir.

b) Esta equivalencia la demostraremos como una “doble implicancia”.

$\Rightarrow$ Supondremos que se cumple $A \cup B = A \cap C$ e intentaremos demostrar que

$$B \subseteq A \wedge A \subseteq C$$

En efecto, sabemos que $B \subseteq A \cup B$ y por hipótesis (la igualdad esa) se tiene

$$B \subseteq A \cap C$$

Por otro lado por lo visto en cátedra $A \cap C \subseteq A$. Con esto, por transitividad de la inclusión de conjuntos concluimos

$$B \subseteq A$$

Para demostrar la otra inclusión, recordamos que $A \subseteq A \cup B$ y que $A \cap C \subseteq C$ y usamos un razonamiento análogo al anterior.

$\Leftarrow$ Demasiado trivialona y evidente. Hagala como ejercicio mejor, para que así se saque un 7 en el control del próximo sábado.

Como demostramos las 2 implicancias, podemos concluir que la equivalencia es cierta.