Pauta Examen, MA1001 Introducción al Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (28 de Junio)

pr:08 **P1)** (*1.5 pts.*) Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(1+2x) + \sqrt{1-x^2}$.

Pauta:

$1 + 2x > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$	0.5 ptos.
$1 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-1,1]$	0.5 ptos.
Dominio$=(-\frac{1}{2}, 1]$	0.5 ptos.

pr:15 **P2)** (*1.5 pts.*) Indique si los siguientes conjuntos tienen o no máximo, mínimo, supremo, ínfimo, indicando su valor en caso de existir.

a) $A = (2,3] \cup (0,1)$

b) $B = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Pauta:

$\max(A) = \sup(A) = 3$, $\inf(A) = 0$, $\min(A)$ no existe	0.75 ptos.
$B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots\}$	0.25 ptos.
$\max(B) = \sup(B) = 1$, $\inf(B) = 0$, $\min(B)$ no existe .... (*Obs: Redondear la suma de puntos*)	0.5 ptos.

pr:11b **P3)** (*2 pts.*) Derive:

a) $f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$.

b) $f(x) = \exp\left(\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right)$.

Pauta:

$\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$.	1 pto.
$\left(\exp\left(\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right)\right)' = \exp\left(\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right) \cdot \frac{2x\cdot(2x^2+1)-(x^2-1)\cdot(4x)}{(2x^2+1)^2}$.	1 pto.

pr:01 **P4)** (*3 pts.*) Considere las funciones $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ y $g(x) = \sec^2(\frac{x}{2})$.

Calcule $f'(x)$ y $g'(x)$ y pruebe que $f'(x) = g'(x)$.

Pauta:

$f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$	1 pto.
$g'(x) = 2\sec(\dfrac{x}{2}) \cdot \sec(\dfrac{x}{2})\tan(\dfrac{x}{2}) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}{\cos^3(\frac{x}{2})}$	1 pto.
$\dfrac{2\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{4\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{(2\cos^2(\frac{x}{2}))^2}$	1 pto.

`pr:14` **P5)** (*2 pts.*) Una función f tiene polinomio de Taylor de orden 15 en $x_0 = 1$ dado por

$$P(x) = (x-1)^2\Big(1 + (x-1)^{10}\Big)$$

a) Encuentre $f^{(j)}(1)$ para $j = 0, \dots, 15$.

b) Escriba el polinomio de Taylor de orden 10 de f en $x_0 = 1$.

Pauta:

$f^{(j)}(1) = 0$ para $j = 0, 1, 3, \dots, 11, 13, 14, 15$.	0.5 pto.
$f^{(2)}(1) = 2$ y $f^{(12)}(1) = 12!$	0.5 pto.
$P_{10}(x) = (x-1)^2$	1 pto.

`pr:07` **P6)** (*2 pts.*) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Pruebe que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

b) Estudie la existencia de $f'(x)$ en $x = 0$.

Pauta:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \arctan \frac{1}{x} = 0$ (nula por acotada)	0.7 pto.
$f(x) = 0$	0.3 pto.
$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x}$.	0.5 pto.
Pero $\lim\limits_{x \to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, luego $f'(0)$ no existe .	0.5 pto.

`pr:03` **P7)** (*3 pts.*) Determinar las asíntotas oblicuas hacia $+\infty$ de las funciones

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2}$.

b) $f(x) = x \ln(e + \frac{1}{x})$.

Pauta:

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 2x} \to 2$	0.7 pto.
$f(x) - 2x = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2} - 2x = \dfrac{-3x^2 + 1 - 4x}{x^2 + 2} \to -3$	0.8 pto.
$\dfrac{f(x)}{x} = \ln(e + \frac{1}{x}) \to 1$	0.7 pto.
$f(x) - x = x\Big(\ln(e + \frac{1}{x}) - 1\Big) = x \ln(1 + \frac{1}{ex}) = \frac{1}{e} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{1}{ex})}{\frac{1}{ex}} \to \frac{1}{e}$ ..... (*OBS: pueden también usar L'Hôpital*)	0.8 pto.

`pr:05b` **P8)** (*3 pts.*) Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$.

b) $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$, donde $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2}$

Pauta:

$$\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 1} \to -1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \boxed{1 \text{ pto.}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \boxed{1 \text{ pto.}}$$

$$\frac{1 - \sqrt{x-1}}{x-2} = \frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{-1}{1+\sqrt{x-1}} \to -\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \boxed{1 \text{ pto.}}$$

(OBS: pueden también usar L'Hôpital, pero sólo en el último límite.)